บทที่ 2

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสองและการแปลงลาปลาซ (Second-order linear equation and Laplace transformation)

2.1 สมการเชิงเส้นเอกพันธ์ (Homogeneous linear equations)

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสองมีรูปทั่วไปคือ

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x) \tag{2.1}$$

เมื่อ P, Q, R และ G เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของตัวแปร x
เราจะเรียกสมการ (2.1) ว่า **สมการเอกพันธ์ (homogeneous equation)** ถ้า $G(x) = 0$

ทฤษฎีบท 2.1.1. ถ้า $y_1(x)$ และ $y_2(x)$ เป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองเอกพันธ์ แล้วสำหรับค่าคงที่ C_1 และ C_2 ใดๆแล้ว $C_1y_1(x), C_2y_2(x)$ และ

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

เป็นคำตอบของสมการดังกล่าวด้วย

ทฤษฎีบท 2.1.2. ถ้า $y_1(x)$ และ $y_2(x)$ เป็นคำตอบที่ไม่เป็นสัดส่วนกันของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองเอกพันธ์ แล้วคำตอบทั่วไปของสมการดังกล่าวจะอยู่ในรูป

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

เมื่อ C_1 และ C_2 เป็นค่าคงที่ ใดๆ

ในที่นี้เราจะพิจารณาเฉพาะสมการเอกพันธ์ที่มี P, Q และ R เป็นค่าคงที่ นั่นคือสมการที่อยู่ในรูป

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{2.2}$$

ในการแก้สมการ (2.2) เราจะพิจารณาสมการ

$$ar^2 + br + cy = 0 \tag{2.3}$$

เรียกสมการ (2.3) ว่า **สมการช่วย (auxiliary equation)** ซึ่งมีคำตอบคือ

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{และ} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

กรณีที่ 1 $b^2 - 4ac > 0$
สมการ (2.2) จะมีคำตอบทั่วไปคือ

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

ตัวอย่าง 2.1.3. จงแก้สมการ $y'' - y' - 6y = 0$

กรณีที่ 2 $b^2 - 4ac = 0$
สมการ (2.2) จะมีคำตอบทั่วไปคือ

$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$$

ตัวอย่าง 2.1.4. จงแก้สมการ $y'' + 4y' + 4y = 0$

กรณีที่ 3 $b^2 - 4ac < 0$
ในกรณีนี้สมการช่วยจะมีผลเฉลยเป็นจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนที่เป็นสังยุคซึ่งกันและกัน นั่นคือ $r_1 = \alpha + i\beta$ และ $r_2 = \alpha - i\beta$ สมการ (2.2) จะมีคำตอบทั่วไปคือ

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

ตัวอย่าง 2.1.5. จงแก้สมการ $y'' - 4y' + 5y = 0$

สรุป คำตอบของสมการ $ay'' + by' + cy = 0$ เป็นดังต่อไปนี้

รากของสมการช่วย	คำตอบทั่วไป
r_1, r_2 เป็นค่าจริงที่แตกต่างกัน	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = r$ เป็นค่าจริง	$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$
$r_1 = \alpha + i\beta,\ r_2 = \alpha - i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

ตัวอย่าง 2.1.6. จงแก้สมการเอกพันธ์ต่อไปนี้

(1) $2y'' - 4y = 0$

(2) $4y'' - 4y' + 13y = 0$

(3) $y'' + 8y' + 16y = 0$

(4) $9y'' + 4y = 0$

(5) $8y'' - 10y' - 3y = 0$

(6) $3y'' - y' = 0$

ตัวอย่าง 2.1.7. จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y'' - 5y' = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

2.2 สมการเชิงเส้นไม่เอกพันธ์ (Non-homogeneous linear equations)

สมการเชิงเส้นไม่เอกพันธ์มีรูปทั่วไปคือ

$$ay'' + by' + cy = G(x) \tag{2.4}$$

โดยที่ a, b และ c เป็นค่าคงที่ และ $G(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ไม่เป็นศูนย์
เรียกสมการเอกพันธ์

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{2.5}$$

ว่าเป็น **สมการเติมเต็ม (complementary equation)** ของสมการ (2.4) ถ้าให้ $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (2.5) และ y_p เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (2.4) แล้วเราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} a(y_c+y_p)'' + b(y_c+y_p)' + c(y_c+y_p) &= (ay_c'' + by_c' + cy_c) + (ay_p'' + by_p' + cy_p) \\ &= 0 + G(x) \\ &= G(x) \end{aligned}$$

ซึ่งเป็นผลให้ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นจริง

ทฤษฎีบท 2.2.1. ให้ y_h เป็นคำตอบทั่วไปของสมการ (2.5) และ y_p เป็นคำตอบเฉพาะของสมการ (2.4) แล้วคำตอบทั่วไปของสมการ (2.4) จะอยู่ในรูป

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

การหาคำตอบ y_h ของสมการ (2.5) เราได้ทำการศึกษามาก่อนหน้านี้แล้ว ฉะนั้นในหัวข้อนี้จะขอกล่าวถึงเฉพาะการหาคำตอบ y_p ของสมการ (2.4) ซึ่งจะใช้วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ดังนี้

1. สมมติคำตอบ y_p ให้สอดคล้องกับ $r(x)$ ดังนี้

เทอมใน $r(x)$	สมมติ y_p
$a_nx^n + ... + a_1x + a_0$	$b_nx^n + ... + b_1x + b_0$
Ae^{kx}	Be^{kx}
$A\cos kx + B\sin kx, A\cos kx, B\sin kx$	$C\cos kx + D\sin kx$
$e^{kx}(a_nx^n + ... + a_1x + a_0)$	$e^{kx}(b_nx^n + ... + b_1x + b_0)$
$e^{kx}(A\cos tx + B\sin tx), Ae^{kx}\cos tx, Be^{kx}\sin tx$	$e^{kx}(C\cos tx + D\sin tx)$

ตัวอย่าง 2.2.2. จงสมมติคำตอบ y_p (โดยไม่ต้องคำนวณค่า) ของสมการไม่เอกพันธ์เชิงเส้นต่อไปนี้

(1) $y'' + 3y' + 2y = x^2$

$y_p = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(2) $y'' + 4y = e^{3x}$

$y_p = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(3) $y'' + y' - 2y = \sin x$

$y_p = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(4) $y'' - 4y = xe^x + \cos 2x$

$y_p = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2. แทนค่า y_p, y_p' และ y_p'' ลงในสมการ (2.4) จากนั้นทำการเทียบสัมประสิทธิ์เพื่อหาค่าของค่าคงที่ต่างๆ ใน y_p ที่สมมติขึ้น

ตัวอย่าง 2.2.3. จงแก้สมการไม่เอกพันธ์เชิงเส้นต่อไปนี้

(1) $y'' + 3y' + 2y = x^2$

(2) $y'' + 4y = e^{3x}$

(3) $y'' + y' - 2y = \sin x$

(4) $y'' + y = \sin x$

(5) $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$

ตัวอย่าง 2.2.4. จงหาคำตอบ $y_h(x)$ และสมมติคำตอบ $y_p(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ **โดยไม่ต้องคำนวณค่าคงตัว**

(1) $y'' + 9y' = xe^{-x}\cos\pi x$

$y_c(x) =$ . . . .

$y_p(x) =$ . . . .

(2) $y'' - 4y' + 8y = 2x^2 + 1 + \sin x$

$y_c(x) =$ . . . .

$y_p(x) =$ . . . .

(3) $2y'' - 5y' + 3y = 2e^{3x} - x + 2$

$y_c(x) =$ . . . .

$y_p(x) =$ . . . .

(4) $y'' - y' = 1 - e^x$

$y_c(x) =$ . . . .

$y_p(x) =$ . . . .

(5) $y'' + 12y' + 36y = 3e^{-6x} + 7xe^{-6x} + x$

$y_c(x) =$ . . . .

$y_p(x) =$ . . . .

(6) $y'' - 2y' + y = xe^x$

$y_c(x) =$ . . . .

$y_p(x) =$ . . . .

2.3 การแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นโดยการแปลงลาปลาซ (Solving of initial – valued problems by using Laplace's transform)

ให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ในช่วง $t \geq 0$ **ผลการแปลงลาปลาซ** ของ $f(t)$ คือฟังก์ชัน $F = \mathscr{L}(f)$ ที่นิยามโดย

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

เรียกฟังก์ชัน $f(t)$ ว่า **ผลการแปลงอินเวอร์ส** ของ $F(s)$ และแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathscr{L}^{-1}(F(s))$ นั่นคือ

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F(s))$$

ตัวอย่าง 2.3.1. จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $f(t) = 3$

(2) $f(t) = e^{2t}$

จากตัวอย่าง 2.3.1 เราสามารถใช้นิยามการแปลงลาปลาซกับฟังก์ชันพื้นฐานต่างๆ และสรุปผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันได้ดังตารางต่อไปนี้

$f(t)$	$\mathscr{L}(f(t))$
k	$\frac{k}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$t^n, \quad n = 1, 2, 3, ...$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^\alpha, \quad \alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$
$\sin kt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$
$\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$
$\sinh kt$	$\frac{k}{s^2-k^2}$
$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2-k^2}$

ตารางที่ 2.1: ตารางแสดงผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันพื้นฐาน

สมบัติเชิงเส้นของการแปลงลาปลาซและการแปลงอินเวอร์ส
กำหนดให้ $F(s) = \mathscr{L}(f(t))$, $G(s) = \mathscr{L}(g(t))$ และ a, b เป็นค่าคงที่ใดๆ แล้ว

(1) $\mathscr{L}(af(t) + bg(t)) = a\mathscr{L}(f(t)) + b\mathscr{L}(g(t)) = aF(s) + bG(s)$

(2) $\mathscr{L}^{-1}(aF(s) + bG(s)) = a\mathscr{L}^{-1}(F(s)) + b\mathscr{L}^{-1}(G(s)) = af(t) + bg(t)$

ผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ของ $f(t)$
สมมติว่า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ $f'(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงบนทุกช่วงจำกัดของ $t \geq 0$ แล้ว

$$\mathscr{L}(f'(t)) = s\mathscr{L}(f(t)) - f(0)$$

และ

$$\mathscr{L}(f''(t)) = s^2\mathscr{L}(f(t)) - sf(0) - f'(0)$$

ตัวอย่าง 2.3.2. จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $\mathscr{L}(4t^2 - 2t + 3)$

(2) $\mathscr{L}(5e^{-3t} + 4t^2 - 3\sin 5t)$

(3) $\mathscr{L}((1 + e^{3t})^2)$

(4) $\mathscr{L}(\cos^2 t)$

(5) $\mathscr{L}(\sin(\omega t + \phi))$

ตัวอย่าง 2.3.3. จงหาผลการแปลงอินเวอร์สเมื่อกำหนด $F(s)$ ดังต่อไปนี้

(1) $F(s) = \dfrac{3s+1}{s^2+5}$

(2) $F(s) = \dfrac{9s+7}{2s(s+1)}$

(3) $F(s) = \dfrac{s+3}{(s-1)(s+5)}$

(4) $F(s) = \dfrac{s+1}{(2s-1)(s+2)}$

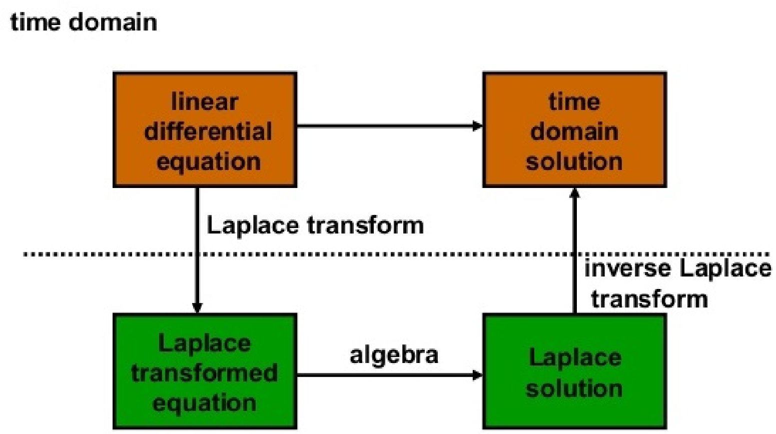
(5) $F(s) = \dfrac{s^2+s+5}{s^2(s-1)(s+1)}$

การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ด้วยวิธีการแปลงลาปลาซ

เราสามารถนำการแปลงลาปลาซไปช่วยหาผลเฉลยของของสมการเชิงอนุพันธ์ได้ โดยมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. แปลงสมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันของ t ที่กำหนดให้ ให้อยู่ในรูปสมการพีชคณิตของฟังก์ชันของ s โดยใช้การแปลงลาปลาซ เรียกสมการที่ได้ว่า **สมการเสริม**
2. แก้สมการเสริมเพื่อหาฟังก์ชันของ s
3. หาผลการแปลงลาปลาซอินเวอร์สของฟังก์ชันของ s ที่หาได้ในข้อ 2. เพื่อจะได้คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูปฟังก์ชันของ t

หรือเขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้



รูปที่ 2.1: หาผลเฉลยของของสมการเชิงอนุพันธ์โดยการแปลงลาปลาซ [2]

จากนี้เป็นต้นไป เราจะกำหนดสัญลักษณ์ให้ $\mathscr{L}(y(t)) = Y(s)$

ตัวอย่าง 2.3.4. จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์โดยอาศัยผลการแปลงลาปลาซ

(1) $y'(t) + 4y(t) = e^t; \quad y(0) = 2$

(2) $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = t + 1; \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

(3) $y''(t) + 4y(t) = 4t + 8; \quad y(0) = 4,\ y'(0) = -1$

(4) จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น $y'' + y' - 2y = 5e^{3t}; \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = -4$
โดยใช้การแปลงลาปลาซ