

# ข้อสอบไล่เตรียมอุดมศึกษา แผนกวิทยาศาสตร์

พ.ศ. 2499

ให้เลือกทำ 3 ข้อ

1. ก. จงพิสูจน์ว่า  $\frac{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}{\cos 75^\circ - \cos 15^\circ} = -\sqrt{3}$

ข. จงพิสูจน์ว่า  $(b^2 - c^2) \cot A + (c^2 - a^2) \cot B + (a^2 - b^2) \cot C = 0$

2. จงพิสูจน์ว่า  $\cos(30^\circ + A)\cos(30^\circ - A) - \cos(60^\circ + A)\cos(60^\circ - A) = \frac{1}{2}$

3. ในสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง มีมุมหนึ่งกาง  $120^\circ$  และด้านที่ประกอบมุมนั้นขนานยาว 3 นิ้ว และ 5 นิ้วตามลำดับ จงหาพื้นที่เหลือ

4. A, B และ C เป็นเมืองสามเมือง B อยู่ทางทิศตะวันออกเฉียงนอกของ A และอยู่ห่างจาก A เป็นระยะทาง 100 กิโลเมตร C อยู่ทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือของ A ถ้าหาก  $\frac{\text{ระยะทางจาก A ถึง C}}{\text{ระยะทางจาก B ถึง C}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$  จงหา ระยะทางจากเมือง A ถึงเมือง C และระยะทางจากเมือง B ถึงเมือง C

พ.ศ. 2500

ให้เลือกทำ 4 ข้อ

1. ในสามเหลี่ยม  $ABC$  จงหาค่าของ  $\cot \frac{C}{2}$   
เมื่อ  $a = 13, b = 14, c = 15$

2. จงพิสูจน์ว่า  $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$

3. จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$\frac{1 - \sin A \cos A}{\cos A (\sec A - \operatorname{cosec} A)} \times \frac{\sin^2 A - \cos^2 A}{\sin^3 A + \cos^3 A} = \sin A$$

4. ก. จงหาค่าของ  $A$  ที่มีค่าเป็นบวกและไม่เกิน  $360^\circ$  จากสมการ  
 $\sin 2A - \cos A = 0$

ข. จงหาค่าของ  $x$  ที่มีค่าเป็นบวกและไม่เกิน  $360^\circ$  จากสมการ  
 $\cos x + 1 = \sin x$

5. เสา  $ABCDE$  บัดอยู่บนสนามแห่งหนึ่ง ส่วนของเสา  $AB, AC$  และ  $AD$  บัดมุม ณ จุด  $P$  บนสนามแห่งนี้มีค่าเท่ากับ  $\alpha, \beta$  และ  $\gamma$  ตามลำดับ ถ้า  $AB = 2, AC = 16, AD = 18$  และ  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  จงหาระยะทาง  $AP$

## พ.ศ. 2501

ให้เลือกทำ 4 ข้อ

1. จงทำให้เป็นผลสำเร็จ  $\frac{2 \cos 180^\circ - 4 \sin 270^\circ - \sqrt{2} \sin 135^\circ}{4 \cos 60^\circ - 2 \sin 330^\circ}$

2.  $\frac{\sin 45^\circ - \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ - \cos 60^\circ}$  กับ  $\frac{\sec 45^\circ - \tan 45^\circ}{\operatorname{cosec} 45^\circ - \cot 45^\circ}$  จงพิสูจน์ว่ามีค่าเท่ากันจริง

3. จงแก้สมการต่อไปนี้ ก.  $\sin A + \operatorname{cosec} A = \frac{3}{\sqrt{2}}$

ข.  $\cos x + \sec x = 2\frac{1}{2}$

4. จงพิสูจน์ว่า  $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

5. ชายคนหนึ่งต้องการวัดส่วนกว้างของแม่น้ำ เขายืนอยู่ริมฝั่งที่จุด B แล้วมองข้ามไปที่ A ฝั่งตรงข้าม ซึ่งเป็นระยะสั้นที่สุด และตรงกันข้ามพอดีแล้วก็เดินเลียบฝั่งแม่น้ำไป 100 เมตรก็หยุดที่ C วัดมุม BCA ได้  $40^\circ$  จงหาส่วนกว้างของแม่น้ำ (กำหนดให้  $\tan 45^\circ = 0.8391$ )

## พ.ศ. 2502

ให้เลือกทำ 4 ข้อ

1. จงพิสูจน์เอกลักษณ์

$$\begin{aligned} & \sin A + \sin B + \sin C - \sin (A + B + C) \\ &= 4 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{C+A}{2} \end{aligned}$$

2. จงหาค่าของ  $\sin 18^\circ$

3. ในสามเหลี่ยม  $ABC$  ถ้า  $a = 10$ ,  $b = 12$  และมุม  $C = 35^\circ$  จงหาตัว  $c$  (กำหนดให้  $\cos 35^\circ = 0.8192$ )

4. ในสามเหลี่ยมใด ๆ จงพิสูจน์ว่า

$$a \cos A + b \cos B + c \cos C = 2a \sin B \sin C$$

5. เสาข 2 เสา ตั้งอยู่บนพื้นราบที่จุด  $A$  และ  $B$  ตามลำดับ  $P, Q$  เป็นจุด 2 จุดระหว่างเสาข จุด  $P$  และ  $Q$  ห่างกัน 30 ฟุต จากจุด  $P$  มองเห็นยอดเสาขเป็นมุมยกขึ้น (angle of elevation)  $30^\circ$  และ  $60^\circ$  ตามลำดับ และที่จุด  $Q$  มองเห็นเสาขเป็นมุมยกขึ้น  $60^\circ$  และ  $45^\circ$  ตามลำดับ จงหาส่วนสูงของเสาขทั้งสอง และอยากทราบว่าเสาขตั้งห่างกันเท่าไร

ให้เลือกทำ 4 ข้อ

1.  $A + B + C = 0$ , จงพิสูจน์ว่า

$$\sin A + \sin B + \sin C = -4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

2. กำหนดให้  $ABC$  เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง จาก  $C$  ลากเส้นตรงมายังจุด  $D$  บนด้าน  $AB$

ถ้า  $AD = m$ ,  $BD = n$ , และมุม  $CDB = Q$

จงพิสูจน์ว่า  $(m + n) \cot Q = n \cot A - m \cot B$

3. ในสามเหลี่ยมใด ๆ จงพิสูจน์ว่า

$$bc \cos A + ca \cos B + 2ab \cos C = c^2 + b^2$$

4. จงพิสูจน์ว่า  $\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 80^\circ = \tan 60^\circ$

5.  $A$  และ  $B$  เป็นยอดเสาอากาศของสถานีส่งวิทยุสองเสา ซึ่งอยู่ในระนาบเดียวกัน (plane)  $B$  อยู่สูงจากพื้นระนาบ 150 ฟุต  $C$  เป็นจุดหนึ่งบนพื้นระนาบระหว่างเสาทั้งสองนี้ และอยู่ภายในเส้นตรงที่ลากจากโคนเสาค้นหนึ่งไปยังโคนเสาอีกต้นหนึ่ง จาก  $C$  มองเห็นยอดเสา  $A$  เป็นมุมยกขึ้น (angle of elevation)  $60^\circ$  จากยอดเสา  $B$  มองเห็นจุด  $C$  เป็นมุมกดลง (angle of depression)  $30^\circ$  และมุม  $ABC$  เท่ากับ  $60^\circ$  จงหาส่วนสูงของเสาอากาศอีกต้นหนึ่ง

ให้เลือกทำ 4 ข้อ

1. จงพิสูจน์ว่า  $\frac{\sin 9^\circ}{\sin 48^\circ} = \frac{\sin 12^\circ}{\sin 81^\circ}$

2. ในสามเหลี่ยมใด ๆ จงพิสูจน์ว่า

$$(a^2 - b^2) (\tan A + \tan B) = c^2 (\tan A - \tan B)$$

3. ก. จงพิสูจน์โดยวิธีเรขาคณิต

$$\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

ข. จงหาค่าของ  $\sin 15^\circ$

4. ถ้า  $A + B + C = 180^\circ$  จงพิสูจน์ว่า

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 4 \cos A \cos B \cos C + 1 = 0$$

5. เสาธงอันหนึ่งตั้งอยู่บนเนินเขาลาดแห่งหนึ่งซึ่งมีความชัน  $32^\circ$  ครั้งแรก

ฉันมองดูแต่ไกลในพื้นราบ สังเกตเห็นมุมยกขึ้น (angle of elevation)

ถึงยอดเสาธง  $47^\circ$  ถัดมาเดินขึ้นไป 1,000 ฟุต ก็ถึงยอดเนิน ต่อจาก

นั้นก็เบนทางราบอีกจนถึงเสาธง เมื่อหยุดที่ยอดเนินเห็นมุมยกขึ้นถึง

ยอดเสาธงเป็น  $77^\circ$  อยากทราบว่าจากยอดเสาธงถึงพื้นระดับล่างเป็น

ระยะทางเท่าไร (กำหนดให้  $\sin 47^\circ = 0.731$ )

ข้อสอบประเมินผลมัธยมศึกษาตอนปลาย สายสามัญ  
ประจำปีการศึกษา 2505

ตรีโกณมิติ (50 คะแนน) ให้เลขทำ 4 ข้อ

1. จงพิสูจน์เอกลักษณ์

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \cot x = \operatorname{cosec} x$$

2. ในสามเหลี่ยม  $ABC$  ซึ่งมีมุม  $A$  และมุม  $B$  เป็นมุมแหลม ถ้า  $\sin A = \frac{3}{5}$ ,  $\cos B = \frac{5}{13}$  และถ้าด้าน  $c$  ยาว 13 นิ้ว จงหาความยาวของด้าน  $c$

3. ถ้า  $A + B + C = \pi$

จงพิสูจน์ว่า  $\cos A + \cos B + \cos C + 1 = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

4. ในสามเหลี่ยม  $ABC$  จงพิสูจน์ว่า  $\frac{\tan B}{\tan C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 - b^2 + c^2}$

5. หอคอยแห่งหนึ่งสูง 360 ฟุต ตั้งอยู่บนริมฝั่งแม่น้ำ จากจุด  $A$  บนริมฝั่งเดียวกันกับหอคอย มองยอดหอคอย เห็นมุมยกขึ้น (angle of elevation) เท่ากับ  $60^\circ$  และจากจุด  $B$  บนริมฝั่งอีกด้านหนึ่งอยู่ตรงข้ามกับจุด  $A$ พอดี จะเห็นมุมยกขึ้นถึงยอดหอคอยเป็น  $45^\circ$  จงหาความกว้างของแม่น้ำ

ข้อสอบประโยชน์มัธยมศึกษาตอนปลาย สายสามัญ  
ประจำปีการศึกษา 2506

ตรีโกณมิติ ก. (20 คะแนน) ให้เลือกทำ 2 ข้อ

1. ก. ถ้า  $\cos A = -\frac{3}{5}$  จงหา  $\sin A$

ข. ถ้า  $\tan 4A = \cot 2A$  จงหา  $A$

ค. สามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง มุมหนึ่งใหญ่  $30^\circ$  และ  
ด้านที่ยาวที่สุดยาว  $4\sqrt{3}$  นิ้ว ด้านสั้นที่สุดยาวเท่าใด

2. จงพิสูจน์ว่า

ก.  $\frac{\cos(90^\circ + A) \sin(180^\circ - A) \tan(180^\circ + A)}{\tan(-A) \cot(90^\circ - A) \cos(360^\circ - A)} = \sin A$

ข. ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีด้านยาวด้านละ  $a$  หน่วย และมี  
มุมยอด  $\theta$  จะมีความยาวเป็น  $2a \sin \frac{\theta}{2}$

3. เมื่อเวลาเที่ยงวัน เรือสามลำจอดทอดสมอค้ำนี้ เรือ  $A$  อยู่ทางทิศ  
ตะวันตกของเรือ  $C$  และอยู่ห่างจากเรือ  $C$  90 ไมล์ เรือ  $B$  อยู่ทาง  
ทิศใต้ของเรือ  $C$  และอยู่ทางทิศ  $S.30^\circ E.$  ของเรือ  $A$  จงหาว่า

ก. เรือ  $B$  อยู่ห่างจากเรือ  $A$  เท่าใด

ข. เรือ  $B$  อยู่ห่างจากเรือ  $C$  เท่าใด

ค. ถ้าเรือ  $A$  เปลี่ยนตรงไปซึ่งเรือ  $B$  ถึงเรือ  $B$  เมื่อเวลาเที่ยงกัน จง  
หาอัตราเร็วของเรือ  $A$



ตรีโกณมิติ ข. (40 คะแนน) เลือกทำ 4 ข้อ

1. ก. จงหาค่าของ  $\cos 150^\circ \cos 420^\circ + \sin 330^\circ \sin 300^\circ$

ข. จงหาค่าของ  $\sin\left(\frac{\pi}{3} - A\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} + A\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} - A\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} + A\right)$

2. กำหนดให้  $a = 1$ ,  $b = \sqrt{3}$ ,  $A = 30^\circ$  จงหาส่วนที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม

3. ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จงพิสูจน์ว่า

$$(b - c) \cos C + c (\cos B - \cos A) = C \cos \frac{A-B}{2} \operatorname{cosec} \frac{A+B}{2}$$

4. ถ้า  $A + B + C = 180^\circ$  จงพิสูจน์ว่า

$$\begin{aligned} & \sin(B + C - A) + \sin(C + A - B) + \sin(A + B - C) \\ &= 4 \sin A \sin B \sin C \end{aligned}$$

5. เด็กนักเรียนหลังพรางมีเสาธงปักอยู่บนยอด นักเรียนคนหนึ่งหยุดยืนมองที่จุด  $E$  บนสนามห่างจากตึก 4 ฟุต มองเห็นว่าเสาธงจะรับมุมที่ตาของเขาได้ที่สุด ถ้ามุมที่ตึกที่สุดนั้นเป็น  $x$  จงพิสูจน์ว่า ตึกสูง  $4 \tan\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right)$  ฟุต และเสาธงสูง  $2c \tan x$  ฟุต

เดือนสิงหาคม 2507 (บุคคลภายนอก)

ตรีโกณมิติ ก. (20 คะแนน) ให้เลือกทำ 2 ข้อ

1. ก. จงแก้สมการ  $x^2 \tan^2 \frac{\pi}{4} - 2x \sec \frac{\pi}{3} + \cot^2 \frac{\pi}{6} = 0$

ข. ถ้า  $\sin A = p$  จงหาค่าของ  $2 \sec^2 A + 2 \tan A \sec A - 1$  เป็น  
พจน์ของ  $p$

2. ก. จงทำเป็นผลสำเร็จ  $\frac{3 \sin (270^\circ + A) - 4 \cos (180^\circ + A)}{3 \sin (90^\circ - A) - 2 \cos (360^\circ - A)}$

ข. จากเรือลำหนึ่ง มองเห็นประภาคารสองแห่งอยู่ในแนวเส้นตรง  
เดียวกันทางทิศตะวันตก เมื่อเรือเคลื่อนที่ไปทางทิศใต้ระยะทาง  
10 ไมล์ จะมองเห็นประภาคารอยู่ทางทิศ  $N.W.$  กับ  $W.30^\circ N.$   
อยากทราบว่าประภาคารทั้งสองอยู่ห่างกันเท่าใด (ต้องการทศนิยม  
สองตำแหน่ง)

3. จากหน้าตึกชั้นแปดของตึกหลังหนึ่ง มองไปยังสนามหญ้าตรงโคน  
เสาธงจะเป็นมุมก้ม ซึ่งทราบว่า tangent ของมุมนั้นมามีค่าเป็น 1.402  
แต่ถ้ามองจากหน้าตึกชั้นสิบของตึกหลังนั้น ไปยังที่แห่งเดียวกัน จะ  
เป็นมุมก้ม  $60^\circ$  ถ้าเสาธงอยู่ห่างจากตึกระยะ 55 ฟุต จงหาระยะจาก  
หน้าตึกชั้นแปดไปยังหน้าตึกชั้นสิบของตึกหลังนั้น (ต้องการทศนิยม  
2 ตำแหน่ง)

เดือนสิงหาคม 2507 (บุคคลภายนอก)

ตรีโกณมิติ ข. (40 คะแนน) ให้เลือกทำ 4 ข้อ

1. จงหาค่าของ

ก.  $(\cos \theta + \sin \theta)^2 + (\cos \theta - \sin \theta)^2$

ข.  $2 \cos^2 \frac{\pi}{4} + 4 \sin^2 \frac{\pi}{4} + 3 \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{3}$

2. ถ้า  $A + B + C = 180^\circ$  จงพิสูจน์ว่า

$$\tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = 1$$

3. ในรูปสามเหลี่ยม  $ABC$  ถ้ามุม  $B = 45^\circ$  มุม  $C = 120^\circ$  และด้าน  $a$  ยาว 40 จงหาความยาวของเส้นตั้งฉากที่ลากจากมุม  $A$  มายัง  $BC$  ที่ตัดออกไป

4. ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ถ้า  $A = 2B$  จงพิสูจน์ว่า  $a^2 = b(c + b)$

5. นาย ก. ยืนอยู่ที่เชิงเขาลูกหนึ่ง มองหน้าเขามองยอดเขาเป็นมุม  $47^\circ$  หลังจากเดินขึ้นลาดเขา ซึ่งทำมุม  $32^\circ$  กับพื้นดินไปเป็นระยะทาง 1,000 ฟุต ปรากฏว่ามุมเงยของยอดเขาตรงนั้นเป็น  $77^\circ$  ยอดเขาสูงจากระดับพื้นดินเท่าไร (กำหนด  $\sin 47^\circ = 0.731$ )

ข้อสอบประโยชน์มัธยมศึกษาตอนปลาย สายสามัญ  
ประจำปีการศึกษา 2507

ตรีโกณมิติ ก. ให้เลือกทำ 2 ข้อ

1. ก. จงหาค่า  $x$  และ  $y$  จากสมการ

$$\cot (2x - y) = 1$$

$$\cos (x - 2y) = 1$$

ข. จงพิสูจน์ว่า

$$(1 + \cot A - \operatorname{cosec} A) (1 + \tan A + \sec A) = 2$$

2. ก. จงหาค่า  $k$  ซึ่งทำให้

$$k (\tan \alpha - \cot \alpha) \sin \alpha \cos \alpha = 1 - 2 \cos^2 \alpha$$

ข. ถ้า  $\sec \theta = \frac{13}{5}$  และ  $\tan \theta$  เป็นบวก จงเขียนมุม  $\theta$  และหาค่า

$$\text{ของ } \frac{\cos 135^\circ + \tan \theta}{\cos 60^\circ \cos \theta + \tan 315^\circ \sin (180^\circ + \theta)}$$

3. เมื่อเวลา 18.00 น. เรือลำหนึ่งกำลังจะแล่นไปทางทิศตะวันออกด้วยความเร็วชั่วโมงละ 15 ไมล์ มองเห็นกระโจมไฟอยู่ทางทิศ  $N. 60^\circ E.$  เมื่อเรือแล่นไปได้ 10 นาที มองเห็นกระโจมไฟแห่งนั้นอยู่ทางทิศ  $N. 45^\circ E.$  อยากทราบว่าถ้าแล่นต่อไปตามเส้นทางเดิม เวลาอะไรเรือลำนั้นจะอยู่ห่างจากกระโจมไฟเป็นระยะทางใกล้ที่สุด

ข้อสอบประโยชน์มัธยมศึกษาตอนปลาย สายสามัญ  
ประจำปีการศึกษา 2507

ตรีโกณมิติ ข. (40 คะแนน) ให้เลือกทำ 4 ข้อ

1. จงแก้สมการ  $2 \sec^2 \theta = 5 \tan \theta - 1$  กำหนด  $\tan 56^\circ 19' = 1.5$
2. ในรูปสามเหลี่ยมใดๆ จงพิสูจน์ว่า  $\frac{c+b}{c-b} \tan \frac{A}{2} = \tan \left( \frac{A}{2} + B \right)$
3. จงพิสูจน์ว่า  $\tan 75^\circ - \tan 30^\circ - \tan 75^\circ \tan 30^\circ = \cot \frac{\pi}{4}$
4. จงหาค่าทั่วไปของ  $\theta$  จากสมการ  $\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta = 1$
5. แม่น้ำสายหนึ่งไหลไปทางทิศเหนือ ตัดหลังหนึ่งตั้งอยู่บนฝั่งซ้ายของแม่น้ำสายนี้ จากจุดๆ หนึ่งซึ่งอยู่ทางเหนือของลำน้ำขึ้นไป และอยู่ฝั่งเดียวกันกับตึกหลังนั้น มุมยกขึ้นของตึกเป็น  $60^\circ$  จากจุดอีกจุดหนึ่งซึ่งอยู่บนอีกฝั่งหนึ่งและตรงกันกับจุดแรกพอดีนั้น มุมยกขึ้นของตึกเป็น  $45^\circ$  ถ้าตึกหลังนี้สูง 600 ฟุต จงหาความกว้างของแม่น้ำสายนั้น กำหนด  $\sqrt{6} = 2.45$

เดือนสิงหาคม 2508 (บุคคลภายนอก)

ตรีโกณมิติ ก. (20 คะแนน) ให้เลือกทำ 2 ข้อ

1. จงแก้สมการ

$$x^2 \tan \frac{\pi}{4} - x \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{3} = \sqrt{2} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{4} - \sec \frac{\pi}{3}$$

2. ก. จงทำเป็นผลสำเร็จ

$$\sin (180^\circ - A) \sec (180^\circ + A) \tan (90^\circ - A)$$

ข. ถ้า  $5 \sin A = 3$  และ  $A$  เป็นมุมแหลม จงหาค่าของ

$$\frac{3 \operatorname{cosec} A - 2 \sec A}{9 \operatorname{cosec} A - 4 \sec A}$$

3. ชายคนหนึ่งกำลังจะขังจักรยานจากที่แห่งหนึ่งไปตามถนน ซึ่งตัดตรงไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือ มองเห็นพระเจดีย์อยู่ทางทิศ  $N. 15^\circ E.$  ครั้นเมื่อขังจักรยานไปเป็นเวลา 20 นาที ในอัตราเร็วสม่ำเสมอชั่วโมงละ 12 ไมล์ เขามองเห็นพระเจดีย์น้อยทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือ จงหาระยะทางที่พระเจดีย์อยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นขังจักรยาน และระยะทางที่สั้นที่สุดจากพระเจดีย์ไปยังถนน (คิดทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

เดือนสิงหาคม 2508 (บุคคลภายนอก)

ตรีโกณมิติ ข. (40 คะแนน) ให้เลือกทำ 4 ข้อ

1. ก. จงหามุมทั้งหมดระหว่าง  $0^\circ - 500^\circ$  จากสมการ  $\tan^2 A = 1$   
ข. จงหาค่าของ  $2 \sec^2 \pi \sin 0^\circ - \cos^2 360^\circ + \operatorname{cosec}^2 \frac{3\pi}{2}$
2. ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จงพิสูจน์ว่า  
$$\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C = 4 \cos A \cos B \sin C$$
3. กำหนด  $a = 40$ ,  $b = 60$  และ  $A = 30^\circ$  จงหาค่ามุม  $B$   
(กำหนด  $\sin 48^\circ 36' = 0.75$ )
4. ก. จงหาค่าทั่วไปของ  $\theta$  จากสมการ  $\cot \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$   
ข. จงพิสูจน์ว่า  $\sin^{-1} \frac{1}{x} = \operatorname{cosec}^{-1} x$
5. ชายคนหนึ่งยืนอยู่ที่ธรณีประตูบ้านของเขา สังเกตเห็นยอดเสาอากาศสำหรับรับโทรทัศน์เป็นมุมยกขึ้น  $4\theta$  แต่ถ้าเขามองจากระเบียงบ้านชั้นบนซึ่งอยู่เหนือธรณีประตูบ้านชั้นล่างพอดี เขาจะเห็นมุมยกขึ้นของยอดเสาอากาศนั้นเป็น  $3\theta$  จงแสดงว่ายอดเสาอากาศนั้นสูงจากระดับธรณีประตูบ้านเป็นระยะ  $h \operatorname{cosec} \theta \cos 3\theta \sin 4\theta$  เมื่อ  $h$  คือความสูงของระเบียงบ้านจากธรณีประตู

ข้อสอบประโยชน์มัธยมศึกษาตอนปลาย สายสามัญ  
ประจำปีการศึกษา 2508



ตรีโกณมิติ ก. (20 คะแนน) ให้เลือกทำ 2 ข้อ

1. จงหาค่า  $x$  ที่เป็นมุมบวกที่มีค่าน้อยที่สุดจากสมการ

$$\operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{6} \sin(\pi - x) - \sec\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sec^2 \frac{\pi}{3}$$

2. ก. ถ้า  $\tan 25^\circ = a$  จงหาค่าของ

$$\frac{\tan 155^\circ - \tan 115^\circ}{1 + \tan 155^\circ \tan 115^\circ}$$

ข. จงพิสูจน์ว่า  $2 \operatorname{cosec} x = \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x}$

3. เรือลำหนึ่งกำลังจะแล่นไปทางทิศเหนือด้วยอัตราเร็ว 16.5 ไมล์ ต่อ ชั่วโมง มองเห็นเรือ  $K$  จุดทอดสมออยู่ในแนวเดียวกับประกาการทางทิศตะวันออก หลังจากทีแล่นไปได้ 2 ชั่วโมง มองเห็นเรือ  $K$  อยู่ทางทิศ  $S.34^\circ 40' E.$  และประกาการอยู่ทางทิศ  $S.60^\circ E.$  จงหา ระยะทางระหว่างเรือ  $K$  กับ ประกาการ

กำหนด  $\cot 55^\circ 20' = 0.6916$





**ข้อสอบประโยคมัธยมศึกษาตอนปลาย สายสามัญ**  
**ประจำปีการศึกษา 2508**

ตรีโกณมิติ ข. (4 คะแนน) ให้เลือกทำ 4 ข้อ

1. ก. ถ้า  $\cos A + \cos B = a$  และ  $\sin A + \sin B = b$   
จงพิสูจน์ว่า  $\cos A \cos B + \sin A \sin B = \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}$
- ข. ถ้า  $\frac{\tan A}{1 - \tan A} \cdot \frac{\tan B}{1 - \tan B} = \frac{1}{2}$  จงพิสูจน์ว่า  $A + B = 225^\circ$
  
2. ก. สะพานทอดข้ามคลองแห่งหนึ่งตั้งอยู่บนตอม่อหกต้น ระยะจากจุดศูนย์กลางของตอม่อต้นหนึ่ง ถึงจุดศูนย์กลางของตอม่อต้นถัดไปยาว 40 ฟุต เรือพายลำหนึ่งจอดอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันกับจุดศูนย์กลางของตอม่อต้นที่สาม ซึ่งทำให้ระยะระหว่างจุดศูนย์กลางของตอม่อต้นแรกกับต้นสุดท้ายรองรับมุมฉากพอดี จงหาระยะทางจากเรือลำนี้ไปยังสะพาน
- ข. จงหาค่าของ  $\cos 80^\circ + \sin 50^\circ - \cos 20^\circ$
  
3. ถ้า  $A + B + C = 0$  จงพิสูจน์ว่า  
 $(1 - \sin^2 B) + (1 - \sin^2 C) - (1 - \sin^2 A) = 1 + 2 \sin B \sin C \cos A$
  
4. ก. จงหาค่าทั่วไปของ  $\theta$  จากสมการ  $1 + \frac{\sqrt{3} \sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} = (1 + \sqrt{3}) \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
- ข. จงพิสูจน์ว่า  $\cot^{-1} \frac{1}{5} - \cot^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{7}{9} = 45^\circ$
  
5. เสาขึงต้นหนึ่งยาว 100 ฟุต บัดตั้งตรงที่กลางสนามหญ้ารูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ถ้าแต่ละด้านของสามเหลี่ยมรองรับมุมโต  $60^\circ$  ที่ยอดเสา จงหาความยาวของแต่ละด้านของสนามหญ้ารูปสามเหลี่ยมนั้น (ตอบเป็นทศ)

เดือนสิงหาคม 2509 (บุคคลภายนอก)

ตรีโกณมิติ ก. (20 คะแนน) ให้เลือกทำ 2 ข้อ

1. ก. ถ้า  $7 \cot \alpha = 6$  จงหาค่าของ

$$\frac{21 \cos \alpha - 8 \sin \alpha}{\cos \alpha + 2 \sin \alpha}$$

ข. จงหาค่า  $\theta$  ซึ่งจะทำให้  $\sin 4\theta = \cos 5\theta$

(ต้องการมุมบวกที่เล็กที่สุดเท่านั้น)

2. ก. ถ้า  $\tan A = p$  จงพิสูจน์ว่า

$$p + p^{-1} = \sec A \operatorname{cosec} A$$

ข. จงหาค่าของ

$$\cot \left( \pi + A \right) - \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2} \cos \frac{\pi}{3} + \tan \left( A - \frac{3\pi}{2} \right)$$

3. จากจุด ๆ หนึ่งบนพื้นดิน มองเห็นเสาธงที่ตั้งอยู่บนอาคารหลังหนึ่ง  
รองรับมุมใหญ่  $23^{\circ}6'$  และที่จุดเดียวกันนั้นมองเห็นโคนเสาธง เป็น  
มุมเงย  $30^{\circ}$  ถ้าจุด ๆ นั้นอยู่ห่างจากอาคารหลังนั้นเป็นระยะทาง 75 ฟุต  
จงหาความสูงของเสาธง

$$\text{กำหนด } \cot 36^{\circ} 54' = 1.3319$$

เดือนสิงหาคม 2509 (บุคคลภายนอก)

ตรีโกณมิติ ข. (40 คะแนน) ให้เลือกทำ 4 ข้อ

1. ก. จงหาค่าของ  $\frac{\cos 20^\circ - \cos 70^\circ}{\sin 70^\circ - \sin 20^\circ}$   
 ข. จงหาค่าของ  $\cos(\pi + A) \cos(\pi - A) - \sin(\pi + A) \sin(\pi - A)$   
 ค. ถ้า  $A$  เป็นมุมบวกอยู่ในควอดแรนต์ที่สี่  $\frac{A}{2}$  จะอยู่ในควอดแรนต์ใด  
 ง. ถ้า  $B = 30^\circ$ ,  $c = 150$ ,  $b = 75$  จงหามุม  $A$   
 จ. จงหามุมบวกที่เล็กที่สุดที่มีค่าฟังก์ชันผกผันเป็น  $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
  
2. ในรูปสามเหลี่ยม  $ABC$  ถ้า  $(a + b + c)(c + a - b) = 3ca$  จงหาค่าของมุม  $B$  ที่เป็นมุมบวกที่มีค่าน้อยที่สุด
  
3. ถ้า  $X + Y + Z = \pi$  จงพิสูจน์ว่า  

$$\tan(X + Y) + \tan(Y + Z) + \tan(Z + X)$$

$$= \sqrt{\sec^2(X + Y) - 1} \cdot \sqrt{\sec^2(Y + Z) - 1} \cdot \sqrt{\sec^2(Z + X) - 1}$$
  
4. ก. จงพิสูจน์ว่า  $\tan^{-1} \frac{1}{3} - \cot^{-1} 5 + \cot^{-1} 7 = \tan^{-1} \frac{3}{11}$   
 ข. จงหาค่าทั่วไปของ  $\theta$  จากสมการ  $\operatorname{cosec}^2 \theta = 4$
  
5. จากจุดสองจุดบนพื้นราบ ห่างจากเชิงหอคูดาวเป็นระยะ  $a$  และ  $b$  ฟุต เราจะได้เห็นยอดหอเป็นมุมยกขึ้น  $x^\circ$  และ  $y^\circ$  ตามลำดับ ถ้ามุมทั้งสองนี้รวมกันเท่ากับหนึ่งมุมฉากแล้ว จงหาความสูงของหอคูดาวนั้น



# ข้อสอบประโยชน์มัธยมศึกษาตอนปลาย สายสามัญ

ประจำปีการศึกษา 2509

1. ก. จงหาค่าของ  $x$  ซึ่งน้อยกว่า  $360^\circ$  จากสมการ

$$\sec^2 x + \cot(90^\circ + x) - 1 = 0$$

ข. จงพิสูจน์ว่า  $\frac{\tan A - \sin A}{\sin^3 A} = \frac{\sec A}{1 + \cos A}$

2. ก. ถ้า  $\cos y = \frac{4}{5}$  และ  $y$  เป็นมุมแหลม

จงหาค่าของ  $\frac{5 \sin y - \tan y}{1 + \sec y}$

ข. จงทำเป็นผลสำเร็จ  $\frac{\tan \frac{\pi}{4} - \cos\left(A + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(2\pi - A)}{\cot \frac{\pi}{2} + \sec \frac{\pi}{3} - \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2}}$

3. ชายผู้หนึ่งยืนอยู่ที่จุด  $A$  บนพื้นดินทางทิศตะวันตกของภูเขาสูงหนึ่ง เขามองเห็นมุมเงยของยอดภูเขาเป็น  $68^\circ$  เมื่อเขาเดินไปยังจุด  $B$  ซึ่งอยู่ทางทิศตะวันตกของ  $A$  บนพื้นราบเดียวกัน แล้วหันกลับมาดูยอดภูเขานั่นอีกครั้งหนึ่ง กราฟมุมเงยของยอดภูเขาเป็น  $30^\circ$  ถ้าภูเขาสูง 1500 ฟุต และ  $\tan 22^\circ = 0.404$  จงหาระยะทางจาก  $A$  ถึง  $B$  คิดเป็นฟุต และถ้าเขาเดินจาก  $A$  ไปยัง  $B$  เสียเวลา 6 นาที อยากทราบว่า เขาเดินได้ชั่วโมงละกิโลเมตร (ต้องการคำตอบเป็นทศนิยมเพียง 2 ตำแหน่ง)



ประจำการศึกษา 2509

ตรีโกณมิติ ข. (40 คะแนน) ให้เลือกทำ 4 ข้อ

1. ก. จงหาค่าของ  $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) - \sin(45^\circ - \theta) \sin(45^\circ + \theta)$

ข. ถ้า  $2 \cos^2 A - \cos A - 1 = 0$  จงหาค่าของมุม  $A$  ที่มีค่าอยู่ระหว่าง  $0^\circ$  ถึง  $180^\circ$

ค. จงหาค่าของ  $\cot\left(\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

ง. จงหาค่าทั่วไปของ  $\theta$  จากสมการ  $\cot 2\theta = 1$

จ. เสาไฟฟ้าต้นหนึ่งถูกพายุพัดหัก ยอดเสาหักข้างลงมาทำมุมกับพื้นดินเป็นมุม  $45^\circ$  ถ้าระยะจากโคนเสามาถึงจุดที่ยอดเสาจุดพื้นดินเป็น 50 ฟุต เสาไฟฟ้าต้นนั้นสูงกี่ฟุต

2. ในรูป  $\triangle ABC$  ถ้า  $a^2(a^2+b^2) - b^2(2c^2-b^2) + c^2(c^2-2a^2) = 0$

3. ถ้า  $A + B + C = \pi$  จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C} = \sqrt{\sec^2 A - 1} \cdot \sqrt{\sec^2 B - 1}$$

4. ก. จงหาค่าของ  $x$  จากสมการ  $\tan^{-1} \frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1} \frac{x+1}{x+2} = 45^\circ$

ข. จงพิสูจน์ว่า  $(a-b) \cos \frac{C}{2} = c \sin \frac{A-B}{2}$  เมื่อ  $ABC$  เป็น  $\triangle$  รูปหนึ่ง

5. นายเพียร หมั่นเลิศ ขับจักรยานไปตั้งบ้านหลังหนึ่งซึ่งอยู่ทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือของภูเขาลูกหนึ่ง สังเกตเห็นมุมยกขึ้นของภูเขาลูกนั้นเป็น  $45^\circ$  เมื่อเขาขับจักรยานต่อไปทางทิศใต้เป็นเวลา 10 นาที เขาก็มาถึงบ้านอีกหลังหนึ่ง คราวนี้เขาสังเกตเห็นมุมยกขึ้นของภูเขาลูกนั้นเป็นมุม  $30^\circ$  ถ้าชายผู้ขับจักรยานได้เร็วชั่วโมงละ 12 กิโลเมตร ภูเขาลูกนั้นสูงเท่าไร? (ตอบเป็นเมตร)

เดือนสิงหาคม พ.ศ. 2510 (บุคคลภายนอก)

ตรีโกณมิติ ก. (20 คะแนน) ให้เลือกทำ 2 ข้อ

1. จงหาขนาดของ  $\hat{x}$  และ  $\hat{y}$  ถัดเป็นองศา จากสมการ

$$\sin (2x - y) = \cos 90^\circ$$

$$\tan (x + 4y) = \cot 45^\circ$$

2. ก. จงทำ  $(1 - \frac{1}{\operatorname{cosec} \theta}) \tan^2 \theta$  เป็นพจน์ของ  $\sin \theta$

ข. จงทำเป็นผลสำเร็จ

$$(a+b) \tan 225^\circ - (a-b) \sin 270^\circ + (a^2+b^2) \cot 990^\circ - (a^2-b^2) \cos (-2\pi)$$

3. เสา  $AB$  และ  $CD$  ตั้งอยู่บนพื้นดินที่จุด  $A$  และจุด  $C$  ซึ่งห่างกัน 120 ฟุต จากจุดกึ่งกลางบนพื้นดินระหว่างจุด  $A$  และจุด  $C$  มุมเงยของ  $B$  และ  $D$  ต่างเป็นมุมประกอบหนึ่งมุมฉากของกันและกัน ถ้าเสา  $AB$  สูงเป็นสามเท่าของเสา  $CD$  จงหาขนาดของมุมเงยแต่ละมุมตรงจุดกึ่งกลางไปยังยอดเสา และจงหาความสูงของเสาทั้งสอง



เดือนสิงหาคม พ.ศ. 2510 (บุคคลภายนอก)

ตรีโกณมิติ ข. ให้เลือกทำ 4 ข้อ

- ก. จงทำเป็นผลสำเร็จ  $\frac{\sin(180^\circ - A)}{\tan(180^\circ + A)} \cdot \frac{\cot(90^\circ - A)}{\tan(90^\circ + A)} \cdot \frac{\cot(360^\circ - A)}{\sin(-A)}$

ข. จงหามุมบวกที่มีขนาดเล็กที่สุดที่มีค่าฟังก์ชันผกผันเป็น  $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

ค. จงพิสูจน์ว่า  $\left(\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{A}{2}\right)^2 = 2$

ง. จงหาค่าทั่วไปของ  $\theta$  จากสมการ  $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

จ. ถ้า  $\cot A = \frac{\cos 2A + 1}{\sin 2A}$  จงหาค่าของ  $\cot 22^\circ 30'$
- ก. ถ้า  $A + B + C = 180^\circ$  จงพิสูจน์ว่า  $\frac{\sin B + \sin C - \sin A}{\sin A + \sin B + \sin C} = \sqrt{\sec^2 \frac{B}{2} - 1} \sqrt{\sec^2 \frac{C}{2} - 1}$
- ก. ถ้า  $A + B = \frac{5\pi}{4}$  จงหาค่าของ  $(1 + \tan A)(1 + \tan B)$

ข. ถัด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมยาว 4, 7, และ 5 ตามลำดับ จงหามุมโตที่สุด กำหนด  $\cos 78^\circ 28' = 0.2$
- ก. จงหาค่าของ  $x$  จากสมการ  $\cot^{-1}x + \cot^{-1}2x = 135^\circ$
- ก. หอคอยแห่งหนึ่งสูง 80 ฟุต มีเสาธงปักอยู่บนยอด นายรุ่ง รักเวียน ยืนอยู่ที่จุดแห่งหนึ่งบนพนราบเดียวกันกับเชิงหอคอย ห่างจากหอคอย เป็นระยะ 100 ฟุต สังเกตเห็นเสาธงรองรับมุม ณ จุดที่เขาอยู่นั้น เป็นมุม  $\arctan \frac{1}{9}$  เสาธงนั้นสูงเท่าไร

# ข้อสอบประโยชน์มัธยมศึกษาตอนปลายสายสามัญ

ประจำปีการศึกษา พ.ศ. 2510



ตรีโกณมิติ ก. ให้เลือกทำ 2 ข้อ

1) จงเขียนเฉพาะคำตอบลงในช่องว่างที่เว้นไว้ตอนท้ายของแต่ละข้อใน  
กระดาษคำตอบนี้

1.1 จงหาค่าของ  $\tan \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{3}$

1.2 จงหาค่าของ  $2 \cot^2 45^\circ + \sqrt{3} \cot^3 60^\circ$

1.3 จงหาค่าของ  $\sec A - \tan A$  เมื่อ  $\sin A = -\frac{5}{13}$   
และ  $A$  อยู่ในควอดแรนท์ที่ 4

1.4 จงทำเป็นผลสำเร็จ  $\frac{(\tan^2 \theta + 1)(\cos^2 \theta - 1)}{2 \tan^2 \theta}$

1.5 ถ้า  $\tan \theta \cos \theta = 0.5$  จงหา  $\theta$  เมื่อ  $\theta < 90^\circ$

1.6 ถ้า  $\cos x = \frac{y}{2}$  จงหา  $\tan x$  เมื่อ  $x$  อยู่ในควอดแรนท์ที่ 1

1.7 ถ้า  $x \sin(90^\circ - A) \cot(90^\circ - A) = \cos(90^\circ + A)$  จงหา  $x$

1.8 จงหา  $k$  เป็นฟังก์ชันของมุม  $A$  ซึ่งจะทำให้

$$\sin A \cos(90^\circ - A) + k \sin(90^\circ + A) = 1$$

1.9 ในควอดแรนท์ที่ 1 ถ้า

$$\sin(20^\circ + \theta) = \cos 4\theta \text{ จงหา } \theta$$

1.10 ให้  $\sin A - \cos A = 0$  เมื่อ  $A < 90^\circ$  จงหาค่าของ  $\operatorname{cosec} A$

2) ก. ถ้า  $\frac{\tan x + \tan y}{1 + \tan x \tan y} = \tan 225^\circ$  และถ้า  $\tan x = \frac{2}{3}$  จงหา  $\tan y$

ข. ถ้า  $x < 90^\circ$  จงหา  $x$  จากสมการ  $\tan x \sin x = 1.5$

3) อาคารหลังหนึ่งตั้งอยู่ตรงจุด  $C$  บนพื้นราบ  $CP$  จากจุด  $P$  บนพื้น  
รานั้นมองเห็นขอบล่างของหน้าต่างชั้นสูงสุดของอาคารหลังนั้น เป็น

# ข้อสอบประโยชน์มัธยมศึกษาตอนปลายสายสามัญ

ประจำปีการศึกษา พ.ศ. 2510

ตรีโกณมิติ ข. (40 คะแนน) ให้เลือกทำ 4 ข้อ

- ก. ถ้า  $\tan A = \frac{4}{3}$  จงหาค่าของ  $\frac{5 \sin A + 7 \cos A}{6 \cos A - 3 \sin A}$   
ข. จงหาค่าของ  $\sin^2 60^\circ \cot 30^\circ - 2 \sec^2 45^\circ + 3 \cos 60^\circ \tan 45^\circ + \tan^2 60^\circ$   
ค. จงหาค่าทั่วไปของ  $\sec^2 \theta = 2$   
ง. จงหาค่าของ  $\sin(-870^\circ)$   
จ. ถ้า  $A = 60^\circ$   $B = 38^\circ 11'$  และ  $a = 7$  จงหาด้าน  $b$   
กำหนด  $\sin 38^\circ 11' = 0.6182$  (ต้องการคำตอบเป็นจำนวนเต็ม)

2. ถ้า  $A + B + C = 0$  จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}} + \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 B}} + \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 C}}$$
$$= 4 \left[ \frac{1}{\sec \frac{A}{2}} \cdot \frac{1}{\sec \frac{B}{2}} \cdot \frac{1}{\sec \frac{C}{2}} \right] - 1$$

3) ก. จงหาค่าของ  $x$  จากสมการ

$$\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1} \frac{8}{31}$$

ข. จงพิสูจน์ว่า  $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right)} + \sqrt{2} = 0$

4) ถัด้านสามด้านของ  $\Delta$  รูปหนึ่งอยู่ในอนุกรมก้าวหน้าเลขคณิต และด้าน  $a$  เป็นด้านสั้นที่สุด จงพิสูจน์ว่า  $\cos A = \frac{4c-3b}{2c}$

5) เด็กชายมานะมองเห็นยอดเจดีย์องค์หนึ่งอยู่ทางทิศใต้เป็นมุมยกขึ้น  $60^\circ$  เด็กหญิงวิริยะขึ้นอยู่ทางทิศใต้ มองเห็นยอดเจดีย์องค์นั้นอยู่ทางทิศเหนือเป็นมุมยกขึ้น  $45^\circ$  ถ้าเด็กทั้งสองคนนั้นยืนอยู่ห่างกันเป็นระยะ

