1.) $7^{7^{7^{7^{7}}}}$ หารด้วย 10 เหลือเศษเท่าไร

ข้อ 1 $7^{7^{7^{7}}}$ หารด้วย 10 เหลือเศษเท่าไหร่

$7^3 = 343 \equiv 3 \pmod{10}$ จะได้ $\left(7^3\right)^2 = 7^6 \equiv 3^2 \equiv 9 \pmod{10}$

แต่ $7 \equiv 7 \pmod{10}$ ฉะนั้น $7^6 \cdot 7 = 7^7 \equiv 9 \cdot 7 = 63 \equiv 3 \pmod{10}$

นั่นคือ $7^7 \equiv 3 \pmod{10}$ ...(*)

จาก สมภาค (*) จะได้ $(7^7)^7 \equiv 3^7 \equiv 7 \pmod{10}$

นั่นคือ $7^{7^2} \equiv 7 \pmod{10}$

และ $(7^{7^2})^7 \equiv 7^7 \equiv 3 \pmod{10}$ นั่นคือ $7^{7^3} \equiv 3 \pmod{10}$

ทำเช่นนี้ต่อไปจะสังเกตเห็นว่า $7^{7^n}\begin{cases}\equiv 3 \pmod{10} & \text{for } n = odd\ \ number \\ \equiv 7 \pmod{10} & \text{for } n = even\ \ number\end{cases}$ ....(**)

และ 7 ยกกำลังจำนวนเต็มบวกใดๆก็ตาม เป็นจำนวนเต็มคี่เสมอ

ฉะนั้น 7^{7^7} เป็นจำนวนเต็มคี่

จาก (**) เมื่อ $n = 7^{7^7}$ จะได้ $7^{7^{7^7}} \equiv 3 \pmod{10}$

นั่นคือ $7^{7^{7^7}}$ หารด้วย 10 เหลือเศษ เท่ากับ 3 #

Note : *odd number* คือ จำนวนเต็มคี่ และ *even number* คือ จำนวนเต็มคู่

2.) ให้หาค่าของ $(2+\sqrt{3})^2(2-\sqrt{3})^3+(2-\sqrt{3})^2(2+\sqrt{3})^3$

วิธีคิด

$$(2+\sqrt{3})^2(2-\sqrt{3})^3+(2-\sqrt{3})^2(2+\sqrt{3})^3$$
$$=(2+\sqrt{3})^2(2-\sqrt{3})^2(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})^2(2-\sqrt{3})^2(2+\sqrt{3})$$
$$=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4$$

ข้อ 3 ปัจจุบันไมตรีอายุ 42 ปี ถ้าไมตรีมีอายุเท่ากับมนตรีในปัจจุบัน และมนตรีจะมีอายุเป็นครึ่งหนึ่งของไมตรี ดังนั้น ปัจจุบันมนตรีอายุมีอายุกี่ปี

วิธีทำ ปัจจุบัน ไมตรีอายุ 42 ปี ดังนั้นเราจะกำหนดว่า ปัจจุบัน มนตรีอายุ x ปี

และตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้ จะได้ว่า...

ถ้าไมตรีอายุ x ปี จะได้ว่า มนตรีอายุ x/2 ปี

ดังนั้น 42-x = x-x/2

x = 28

ตอบ ปัจจุบันมนตรีอายุ 28 ปี

4.) มีนักเรียน 101 คน ครูคนที่ 1 มีของเล่น 75 ชิ้น แจกให้ นักเรียนคนละ 1 ชิ้น โดยแจกเรียงลำดับ จากซ้ายมือไปขวามือ ครูคนที่ 2 มีของเล่น 51 ชิ้น แจกให้ นักเรียน คนละ 1 ชิ้น โดยแจกเรียงลำดับจากคนที่ 101 จากขวามือมาซ้ายมือ ครูคนที่ 3 มีของเล่น 45 ชิ้น แจกให้นักเรียน คนละ 1 ชิ้น โดยแจกเรียงลำดับเริ่มจากคนที่ 40 จากซ้ายมือไปขวามือ มีนักเรียนกี่คนที่ได้รับของเล่น 3ชิ้น

5.)ให้หาค่า $\sqrt{(a+4)(a-4)(a+2)(a-2)+36}$ เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มบวก

วิธีคิด

$\sqrt{(a+4)(a-4)(a+2)(a-2)+36}$

$=\sqrt{(a^2-16)(a^2-4)+36}$

$Let\ \ B=a^2-10$

$=\sqrt{(B-6)(B+6)+36}$

$=\sqrt{B^2}=|B|=|a^2-10|$

6.) จงหาจำนวนเต็มบวก m ที่ทำให้ $7m^2+7m+7$ เป็นจำนวนเต็มกำลัง 4

วิธีคิด ให้

$7m^2+7m+7=n^4$

$7(m^2+m+1)=n^4$

$n_{\min}=7$

$m^2+m+1=7^3$

$m^2+m-342=0$

$(m+19)(m-18)=0$

$m=18$

7.) ถ้า $(a^2-a)^3+(2a^2-4)^3=(3a^2-a-4)^3$ ให้หาผลคูณของคำตอบทั้งหมดของสมการนี้

วิธีคิด ให้

$$A = a^2 - a$$

$$B = 2a^2 - 4$$

$$C = 3a^2 - a - 4$$

$$\because A + B = C$$

$$(A+B)^3 = C^3$$

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = C^3 \quad (\because A^3 + B^3 = C^3)$$

$$3ABC = 0$$

$$A = B = C = 0 \qquad \to a = 0$$

จะได้คำตอบคือ 0

8.) ให้หาค่าของ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{16}+\sqrt{15}}\right)^2$

วิธีคิด

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{16}+\sqrt{15}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\right) = \sqrt{2} - 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

ทำไปเรื่อยๆ ก็จะได้ว่า

$$\frac{1}{\sqrt{16}+\sqrt{15}}\left(\frac{\sqrt{16}-\sqrt{15}}{\sqrt{16}-\sqrt{15}}\right) = 4 - \sqrt{15}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{16}+\sqrt{15}}\right)^2 = 3^2 = 9$$

9.) ให้หาจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ $\frac{10^{40}}{10^{35}+3}$

วิธีคิด

$$\frac{10^{40}}{10^{35}+3} = \frac{10^5(10^{35}+3-3)}{10^{35}+3} = \frac{10^5(10^{35}+3) - 3(10^5)}{10^{35}+3}$$

$$= \frac{10^5(10^{35}+3)}{10^{35}+3} - \frac{3(10^5)}{10^{35}+3}$$

$$= 10^5 - \frac{3(10^5)}{10^{35}+3}$$

เนื่องจาก $\frac{3(10^5)}{10^{35}+3}$ มีค่าน้อยกว่า 1 มากๆ ดังนั้น จำนวนเต็มที่ต้องการคือ 99999

10.) ถ้า $a=\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10}+1}$ $,b=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}-1}$ จงหา $\dfrac{a+b-1}{a-b+1}$

วิธีคิด

$$a=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10}+1} \quad ,b=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}-1} \quad \to \; b-1=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10}-1}$$

$$\frac{a+(b-1)}{a-(b-1)}=\frac{\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10}+1}+\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10}-1}}{\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10}+1}-\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10}-1}}=\frac{\dfrac{\sqrt{10}-1+\sqrt{10}+1}{9}}{\dfrac{\sqrt{10}-1-(\sqrt{10}+1)}{9}}$$

$$=\frac{2\sqrt{10}}{-2}=-\sqrt{10}$$

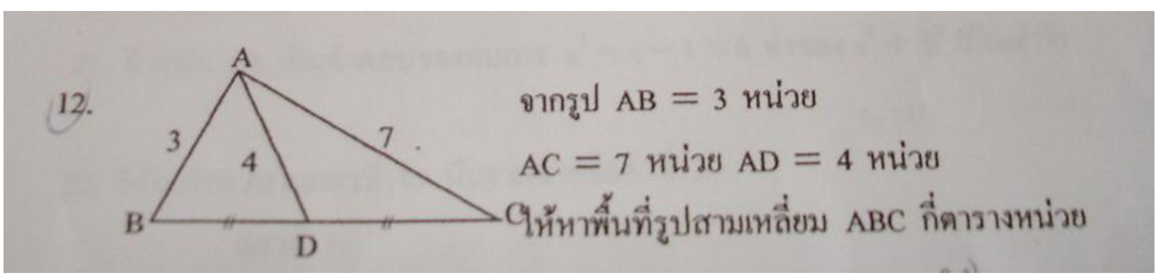
11.) ถ้า $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ แล้ว x^3+x^{-3} มีค่าเท่าไร

วิธีคิด

$$x+\frac{1}{x}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\frac{27\sqrt{2}}{4}-\frac{9\sqrt{2}}{2}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$$

12.)


12. จากรูป AB = 3 หน่วย

AC = 7 หน่วย AD = 4 หน่วย

ให้หาพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC กี่ตารางหน่วย

ข้อ 12

เนื่องจาก $BD = DC$ (จากรูป)

ให้ $BD = DC = x$ และ $[xyz]$ แทนพื้นที่ Δxyz

เพราะว่า $\dfrac{[ABD]}{[ABC]} = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BD}{BD+DC} = \dfrac{1}{2}$

พิจารณา ΔABD

$[ABD]^2 = s(s-AB)(s-BD)(s-AD) = s(s-3)(s-x)(s-4) \quad , \; s = \dfrac{AB+BD+AD}{2} = \dfrac{x+7}{2}$

$[ABD]^2 = \left(\dfrac{x+7}{2}\right)\left(\dfrac{x+1}{2}\right)\left(\dfrac{x-1}{2}\right)\left(\dfrac{7-x}{2}\right) = \dfrac{(x^2-1)(49-x^2)}{16}$

ทำนองเดียวกัน พิจารณา ΔABC

จะได้ $[ABC]^2 = (5+x)(x+2)(5-x)(x-2) = (x^2-4)(25-x^2)$

ฉะนั้น $\dfrac{[ABD]^2}{[ABC]^2} = \dfrac{(x^2-1)(49-x^2)}{16(x^2-4)(25-x^2)}$ แต่ $\dfrac{[ABD]}{[ABC]} = \dfrac{1}{2}$

จึงได้ว่า $\dfrac{(x^2-1)(49-x^2)}{16(x^2-4)(25-x^2)} = \dfrac{1}{4}$

แก้สมการจะได้ $x^2 = 9$, 13

ถ้า $x^2 = 9$ จะได้ $[ABC]^2 = 5(16)$ นั่นคือ $[ABC] = 4\sqrt{5}$

ถ้า $x^2 = 13$ จะได้ $[ABC]^2 = 9(12)$ นั่นคือ $[ABC] = 6\sqrt{3}$

ดังนั้น $[ABC] = 4\sqrt{5}$ หรือ $6\sqrt{3}$ ตารางหน่วย #

13.) ถ้ากำหนด $a*b = ab+a+b$ ให้หาค่าของ $1*\dfrac{1}{2}*\dfrac{1}{3}*\dfrac{1}{4}*...*\dfrac{1}{2549}$

วิธีคิด

$a*b = ab+a+b = (a+1)(b+1)-1$

$consider \;\; \dfrac{1}{m-1}*\dfrac{1}{m} = \left(\dfrac{1}{m-1}+1\right)\left(\dfrac{1}{m}+1\right)-1 = \dfrac{2}{m-1}$

$\dfrac{1}{m-2}*\dfrac{2}{m-1} = \left(\dfrac{m-1}{m-2}\right)\left(\dfrac{m+1}{m-1}\right)-1 = \dfrac{3}{m-2}$

$\vdots$

$\dfrac{1}{m-2548}*\dfrac{2548}{m-2547} = \dfrac{2549}{m-2548}$

$m = 2549$

จากนั้นแทนค่า m ก็ได้คำตอบคือ 2549

14.) กำหนด $a^{4x} = 3-\sqrt{2}$ $\;, a^{-4x} = \dfrac{1}{3-\sqrt{2}}$ ให้หาค่าของ $\dfrac{a^{6x}+a^{-6x}}{a^{2x}+a^{-2x}}$

วิธีคิด

$$a^{6x}+a^{-6x}=(a^{2x}+a^{-2x})(a^{4x}-1+a^{-4x})$$

$$\frac{a^{6x}+a^{-6x}}{a^{2x}+a^{-2x}}=a^{4x}+a^{-4x}-1$$

$$a^{4x}+a^{-4x}-1=3-2\sqrt{2}+\frac{1}{3-2\sqrt{2}}-1$$

แล้วก็คิดเลขต่ออีกนิด…ก็จะได้คำตอบคือ 5

15.) ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวกและ p เป็นจำนวนเฉพาะบวก ถ้า m หาร 777 และ 910 แล้วเหลือเศษเท่ากัน แล้ว m^2+p^2 มีค่าเท่าใด

ข้อ 15

จากโจทย์ จะสามารถเขียน 777 และ 910 ได้ดังนี้

$777=mq+p \quad ...(1)$

$910=mr+p \quad ...(2)$

$(2)-(1)$ จะได้ $m\left(r-p\right)=133$ นั่นคือ $m|133$

ฉะนั้น $m=1$, 7 , 19 , 133

ถ้า $m=1$, 7 เศษที่ได้จากการหาร 777 และ 910 คือ 0 (ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ โจทย์ไม่ต้องการ)

ถ้า $m=133$ เศษที่ได้จากการหาร 777 และ 910 คือ 112 (ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ โจทย์ไม่ต้องการ)

ถ้า $m=19$ เศษที่ได้จากการหาร 777 และ 910 คือ 17 (เป็นจำนวนเฉพาะ)

ทำให้ได้ว่า $p=17$

ดังนั้น $m^2+p^2=19^2+17^2=650$ #

16.) พาราโบลาที่ผ่านจุดกำเนิดและผ่านจุด (1,12) และ (3,6) มีจุดยอดเป็นเท่าใด

วิธีคิด

$y=ax^2+bx+c$

$(0,0)$, $(1,12)$, $(3,6)$

$c=0$

$12=a+b$

$6=9a+3b \quad \rightarrow \quad 2=3a+b$

$a=-5$, $b=17$

$y=-5x^2+17x$

$V(\frac{17}{10},\frac{289}{20})$

17.) 3^5 เมื่อเปลี่ยนเป็นเลขฐาน 6 แล้ว เลขสองหลักสุดท้ายเป็นเท่าใด

17. เลข 3^5 เมื่อเปลี่ยนเป็นเลขฐานหกแล้ว เลขสอง หลักสุดท้ายจะเป็นเท่าใด

โซลูชั่น

หาค่าของ $3^5 = 243$

เปลี่ยน 243 เป็นเลขฐาน 6

6)	243	
6)	40	เศษ 3
6)	6	เศษ 4
6)	1	เศษ 0
	0	เศษ 1

$243 = (1043)_6$ ดังนั้นเลขสองหลักสุดท้าย คือ 43

18.จงหา ส.ป.ส. ของ x^2 ของการ กระจาย $(1+x+x^2)^3$

ข้อ 18

พจน์ทั่วไปของการกระจาย $\left(1+x+x^2\right)^3$ คือ $\dfrac{3!}{p!q!r!}(1)^p \cdot x^q \cdot x^{2r}$, $p+q+r=3$

$p,q,r \geq 0$

ต้องการ สปส. ของ x^2

ฉะนั้น $2r+q=2$ ทำให้ได้ว่า $r=1$, $q=0$, $p=2$ หรือ $r=0$, $q=2$, $p=1$

ดังนั้น สปส. ของ x^2 คือ $\dfrac{3!}{2!0!1!}+\dfrac{3!}{1!2!0!}=3+3=6$ #

19.) เลขโดด 1,2,3,4,5,6,7,8,9 นำมาสร้างเลข 4 หลักให้มีค่ามากกว่า 6000 โดยเลขแต่ละหลักห้ามซ้ำยกเว้นเลข 4 เท่านั้นที่ซ้ำได้ จะสร้างได้กี่จำนวน

วิธีคิด

20.) กำหนด m ,n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $m^2-n^4=19$ ค่าของ m^2+n^4 เป็นเท่าใด

ข้อ 20

$m,n \in \mathbb{N}$

จาก $m^2 - n^4 = \left(m-n^2\right)\left(m+n^2\right) = 19$

เนื่องจาก 19 เป็นจำนวนเฉพาะ และ $m+n^2 > m-n^2$ (เพราะว่า $m,n \in \mathbb{N}$)

ฉะนั้น $m+n^2 = 19$ และ $m-n^2 = 1$

แก้ระบบสมการ จะได้ $m = 10$ ส่งผลให้ $n = 3$ $\left(n>0\right)$

ดังนั้น $m^2 + n^4 = 100+81 = 181$ #

21.) กำหนด a,b เป็นคำตอบของสมการ $x^2 - x - 1 = 0$ จงหาค่าของ $a^9 + b^9$

วิธีคิด

$x^2 - x - 1 = 0$

$a+b=1 \rightarrow a+b-1=0$

$ab=-1$

$a^3+b^3=4$

$a^9+b^9-4^3=3(ab)^3(-4)$

$a^9+b^9=76$

22. ให้หาจำนวนในแถวที่ 89 นับจากซ้ายมือตัวที่ 3

แถวที่ 1	1
แถวที่ 2	2 3 4
แถวที่ 3	5 6 7 8 9
แถวที่ 4	10 11 12 13 14 15 16

ตัวอย่าง เช่น แถวที่ 4 จากซ้ายมือตัวที่ 3 คือ 12

แถวที่ 3 จากซ้ายมือตัวที่ 3 คือ 7

ข้อ 22 สังเกตว่า แถวที่ n จะมีตัวเลข(ที่เรียงติดกัน) อยู่ $2n-1$ จำนวน โดยเริ่มจาก n^2-2n+2 ไปจนถึง n^2 (เรียงจากซ้ายไปขวา)

ฉะนั้น แถวที่ 89 $(n=89)$ ตัวเลขเริ่มจาก $89^2-2(89)+2=7745$

ดังนั้น ตัวที่ 3 ของแถวที่ 89 (ทางซ้ายมือ) คือ $7745+2=7747$ #

23.) กำหนด abc เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆที่มีพื้นที่ $24\sqrt{3}$ ตารางหน่วย และ a + b = 20 หน่วย c = 16หน่วย ค่าของ |a-b| มีค่าเท่าใด

ข้อ 23 ใช้สูตร $\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, $s = \frac{a+b+c}{2}$, Δ = area of ΔABC

จากโจทย์ จะได้ $s = \frac{20+16}{2} = 18$ แทนค่าลงในสูตร

$36(18-a)(18-b) = 3(24^2)$

$(18-a)(18-b) = 48$

$324 - 18(a+b) + ab = 48$

$ab = 18(20) + 48 - 324 = 84 \quad (\because \ a+b=20)$

$a(20-a) = 84$

$20a - a^2 = 84$

$a^2 - 20a + 84 = 0$

$(a-14)(a-6)$

$\therefore \ a = 6 , 14 \quad \rightarrow \quad (a,b) = (6,14) \ , \ (14,6)$

ดังนั้น $|a-b| = |14-6| = 8$ #

24.) นิยาม x^2 เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม ถ้าเขียน 20! อยู่ในรูป $A \times 10^n$ เมื่อ A เป็นจำนวนเต็มแล้ว n มีค่าเท่าไร

ข้อ 24

แท้จริงแล้วโจทย์ต้องการ จำนวนของเลข 0 ที่ลงท้าย 20!

ถ้าเราเขียน 20! ในรูปผลคูณ คือ $20! = 1(2)(3)...(18)(19)(20)$

จะเห็นว่า จำนวนเลข 0 ที่ลงท้าย 20! หาได้โดยหากำลังสูงสุดของ 10 (10^n)

ที่ทำให้ 10^n หาร 20! ลงตัว

เนื่องจาก $10 = 2 \times 5$ และ ใน $20! = 1(2)(3)...(18)(19)(20)$

มีจำนวนของ 2 มากกว่า จำนวนของ 5

ทำให้ได้ว่า กำลังสูงสุดของ 10 หาได้จากกำลังสูงสุดของ 5

และ จำนวนของ 5 ที่เป็นตัวประกอบของ 20! หาได้จาก

$5(10)(15)(20) = 5(5\times 2)(5\times 3)(5\times 4)$ นั่นคือ มี 5 เป็นตัวประกอบของ 20!

อยู่ 4 จำนวน นั่นคือ กำลังสูงสุดของ 5 ที่หาร 20! ลงตัว คือ 4

แต่ กำลังสูงสุดของ 10 เท่ากับ กำลังสูงสุดของ 5

ดังนั้น กำลังสูงสุดของ 10 เท่ากับ 4

ฉะนั้น 20! ลงท้ายด้วย 0 จำนวน 4 ตัว นั่นคือ $n = 4$ #

(หรือ อาจหาได้จากสูตร $n = \left\lfloor \frac{m}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{5^3} \right\rfloor + \dots \quad , m! = A \times 10^n$)

25.) ผลรวมของเลขโดดซึ่งผลลัพธ์ของ $\left(\underbrace{333...333}_{2006}\right)^2 + \underbrace{222...222}_{2006}$

ข้อ 25

สังเกตว่า

$3^2 = 9$

$33^2 = 1089$

$333^2 = 110889$

$3333^2 = 11108889$

ฉะนั้น อาจสรุป ได้ว่า $\left(\underbrace{333...3}_{2006}\right)^2 = \underbrace{111...11}_{2005}0\underbrace{888...88}_{2005}9$

ทำให้ได้ว่า

$$\left(\underbrace{333...3}_{2006}\right)^2 + \left(\underbrace{222...2}_{2006}\right) = \left(\underbrace{111...11}_{2005}0\underbrace{888...88}_{2005}9\right) + \left(\underbrace{222...2}_{2006}\right)$$

$$\left(\underbrace{333...3}_{2006}\right)^2 + \left(\underbrace{222...2}_{2006}\right) = \underbrace{111...111}_{(2005\times 2)+2=4012}$$

ดังนั้น ผลบวกเลขทุกหลักของ $\left(\underbrace{333...3}_{2006}\right)^2 + \left(\underbrace{222...2}_{2006}\right)$ คือ 4012 #

26. กำหนด $x_1 = 2549,\ x_2 = \frac{2}{x_1}, x_3 = \frac{3}{x_2}, x_4 = \frac{4}{x_3}$

$x_5 = \frac{5}{x_4}, x_6 = \frac{6}{x_5}, x_7 = \frac{7}{x_6}, x_8 = \frac{8}{x_7}$ ค่าของ

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ มีผลคูณเป็นเท่าไร 344

$$x_1 \cdot \frac{2}{x_1} \cdot x_3 \cdot \frac{4}{x_3} x_5 \cdot \frac{6}{x_5} \cdot x_7 \cdot \frac{8}{x_7} = 2 \times 4 \times 6 \times 8 = 384$$

27.) กำหนด x , y , z จำนวนจริงบวก

xy + x + y = 11

yz + y + z =14

zx + z + x = 19

จงหาค่าของ xyz + x + y + z

วิธีคิด

$$xy + x + y = 11 \quad \rightarrow (x+1)(y+1) = 12 = 4\times3$$
$$yz + y + z = 14 \quad \rightarrow (y+1)(z+1) = 15 = 3\times5$$
$$zx + z + x = 19 \quad \rightarrow (z+1)(x+1) = 20 = 5\times4$$
$$x = 3$$
$$y = 2$$
$$z = 4$$
$$xyz + x + y + z = 33$$

28.) กำหนด x และ y เป็นจำนวนจริงซึ่ง $x^3 + y^3 + (x+y)^3 + 30xy = 2000$ จงหา x + y

ข้อ 28

$x^3+y^3+(x+y)^3+30xy=2000$, $x,y\in R$

ถ้า x และ y มากกว่า 0

สังเกตว่าถ้า $x=y=10$ แล้ว $x^3+y^3+(x+y)^3+30xy>2000$

และ ถ้า $0<x<10$ และ $y>10$ จะได้ $y^3+(x+y)^3>2000$

ทำให้ได้ว่า $x^3+y^3+(x+y)^3+30xy>2000$ แน่นอน

ฉะนั้น $0\le x,y\le 10$

ตรวจสอบพบว่า $(x,y)=(0,10),(1,9),(2,8),(3,7),(4,6),(5,5)$ เป็นผลเฉลย

(x และ y สลับที่กันได้) ส่งผลให้ $x+y=10$ #

(ในกรณีที่ x และ y น้อยกว่า 0 จะได้ $x^3+y^3+(x+y)^3+30xy<2000$ แน่นอน)

29.) ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมี AB = 20หน่วย AC = 30หน่วย BAC = 120 องศา ถ้า D เป็นจุดบน BC ที่ทำให้ AD แบ่งครึ่งมุม BAC แล้ว AD ยาวเท่าไร

ข้อ 29

วาดรูปตามโจทย์กำหนด

ใช้กฎของโคไซน์ กับ ΔABC จะได้

$$BC^2 = (20)^2 + (30)^2 - 2(20)(30)\cos 120^\circ$$

$$\therefore \quad BC = 10\sqrt{19}$$

ใช้ กฎของไซน์ กับ ΔADC จะได้ $\sin A\hat{C}D = \dfrac{(AD)\sin 60^\circ}{DC}$

ใช้ กฎของไซน์ กับ ΔABC จะได้ $\sin A\hat{C}B = \dfrac{20\sin 120^\circ}{BC}$

เพราะว่า $A\hat{C}D = A\hat{C}B$ ฉะนั้น $\sin A\hat{C}D = \sin A\hat{C}B$

ทำให้ได้ว่า

$$\frac{(AD)\sin 60^\circ}{DC} = \frac{20\sin 120^\circ}{BC}$$

$$DC = \frac{BC \cdot AD}{20} = \frac{\sqrt{19}}{2}AD$$

ต่อไปใช้ กฎของโคไซน์ กับ ΔADC จะได้

$$DC^2 = (AD)^2 + (30)^2 - 2(AD)(30)\cos 60^\circ$$

$$\therefore \quad DC^2 = AD^2 - 30AD + 900 \quad ...*$$

แทนค่า $DC = \dfrac{\sqrt{19}}{2}AD$ ลงใน * จะได้

$$(AD)^2 + 8(AD) - 240 = 0$$

$$(AD + 20)(AD - 12) = 0$$

$$AD = -20 \ , \ 12$$

$$\therefore \quad AD = 12 \quad \#$$

30.) ถ้า x เป็นจำนวนจริงโดยที่ $2 < x < 3$ แล้ว จงหาค่าของ $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$

วิธีคิด

$\sqrt{x+2\sqrt{2(x-2)}} = \sqrt{\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)^2} = \left|\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right|$

$\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}} = \sqrt{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right)^2} = \left|\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right|$

$\left|\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right|+\left|\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right|$

$= \sqrt{x-2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{x-2} \quad (\because\ 2<x<3)$

$= 2\sqrt{2}$

31.) ถ้า $\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1}{3\cdot5\cdot7}+\frac{1}{5\cdot7\cdot9}+\ldots+\frac{1}{11\cdot13\cdot15}=\frac{a}{b}$

โดย a,b เป็นจำนวนเต็มและเป็นเศษส่วนอย่างต่ำแล้ว จงหาค่าของ a+b

วิธีคิด

$$\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1}{3\cdot5\cdot7}+\frac{1}{5\cdot7\cdot9}+\ldots+\frac{1}{11\cdot13\cdot15}=\frac{a}{b}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1\cdot3}-\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{3\cdot5}-\frac{1}{5\cdot7}+\ldots+\frac{1}{11\cdot13}-\frac{1}{13\cdot15}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{13\cdot15}\right)=\frac{16}{195}$$

$a+b=211$

32.) จากระบบสมการ

$4y=12-x^2$

$4x=12-y^2$

ถ้า A และ B เป็นจุดตัดของระบบสมการแล้ว ความยาวระหว่าง A และ B เป็นเท่าใด

ข้อ 32

$(1)-(2) \rightarrow \quad 4(y-x)=(y-x)(y+x)$

$(y-x)(x+y-4)=0$

จะได้ $y=x$ และ $y=-x+4$

ถ้า $y=-x+4$ แทนลงใน (1) จะได้ $x^2-4x+4=(x-2)^2=0$

ส่งผลให้ $x=2$, $y=2$ จุดตัดคือ $(2,2)$

ถ้า $y=x$ แทนลงใน (1) จะได้ $x^2+4x-12=0$

ฉะนั้น $x=-6,2$ จะได้จุดตัด คือ $(-6,-6),(2,2)$

ส่งผลให้ระยะห่าง คือ $d_{AB}=\sqrt{(8)^2+(8)^2}=8\sqrt{2}$ #