

# เรียนแคลคูลัสอย่างไรให้สำเร็จ

เรื่องง่ายๆ ที่ใครๆ ก็คิดว่ารู้

ธีรบุช บุณนาค

28 พฤษภาคม 2550

ก่อนอื่นคงต้องบอกให้ทราบก่อนว่าการเรียนคณิตศาสตร์ในมหาวิทยาลัยนั้นแตกต่างจากตอนที่เรียนมัธยม ในเรื่องต่อไปนี้

## 1. ความรับผิดชอบ

ในมหาวิทยาลัยนักศึกษารับผิดชอบต่อการศึกษาของตนเอง อาจารย์เป็นผู้ชี้แนะ เปรียบเทียบกับการขับรถยนต์ นักศึกษาเป็นคนขับเอง อาจารย์เป็นผู้บอกทาง

## 2. เพื่อนกลุ่มใหม่

ตอนนี้นักศึกษาไม่ได้เป็นกลุ่มคนเก่ง 5% แรกในห้องเรียนของโรงเรียนเดิม ทุกคนที่ลงเรียนเป็นคนเก่งจากที่โรงเรียนต่างๆเช่นกัน ดังนั้นนักศึกษาจะเรียนกับเพื่อนๆ ที่มีความสามารถระดับตนเอง ทุกคนเรียนได้ในระดับ A หรือ B ในแง่ความฉลาดและความสามารถ แต่ความฉลาดเพียงอย่างเดียวจะไม่เพียงพอที่จะทำให้เกิดความสำเร็จได้

## 3. การเรียนต่างจากมัธยม

บทบาทของอาจารย์คือผู้ชี้แนะในหัวข้อที่ต้องศึกษา ไม่ใช่บอกทุกอย่างที่อยู่ในหนังสือ นักศึกษาต้องรับผิดชอบอ่านเพิ่มเติม และฝึกฝนตนเองด้วย ดังนั้นการเรียนการสอนในมหาวิทยาลัยเป็นความร่วมมือระหว่างผู้เรียนและผู้สอน ในมัธยมปลายนักเรียนที่ใส่ใจ น่าจะสอบผ่านได้ โดยการทบทวนบทเรียน แต่ในระดับมหาวิทยาลัย นักศึกษาที่จะทำได้ดีต้องมีการทบทวนอย่างเหมาะสม ความเหมาะสมนี้คืออะไร? อาจใช้กฎง่ายๆคือ 1 ชั่วโมงที่เรียนในห้องต้องการ 2 ชั่วโมงเพิ่มเติมในการจัดการกับความคิดรวบยอด ศึกษาตัวอย่างเพิ่มเติม และทำแบบฝึกหัด การเรียนจะครอบคลุมเนื้อหามากกว่าในมัธยมมาก การเรียนจึงเป็นไปอย่างรวดเร็ว ไม่มีการทวนซ้ำ การสอบแต่ละครั้งจึงมีเนื้อหามากกว่า ตอนนี่การเรียนคณิตศาสตร์เป็นการสะสมความรู้ไม่ใช่เรียนเพื่อแยกประเภทของปัญหาและแก้ปัญหแต่ละประเภท เนื้อหาของแต่ละหัวข้อจะต่อเนื่องกัน การที่ไม่เข้าใจกระบวนการคิดของบางหัวข้อ และนักศึกษาทิ้งไว้ไม่ติดตาม จะทำให้ตามไม่ทันเทคนิคการเรียนแบบเดิมที่ใช้ในมัธยมคือ อาจารย์สอนวิธีแก้โจทย์ นักเรียนเลียนแบบ ทำแบบฝึกหัดที่คล้ายกันนั้น โดยไม่ได้รู้และเข้าใจกระบวนการและแนวคิด จะใช้ไม่ได้อีกต่อไป

## 4. เนื้อหาคณิตศาสตร์จะต่างจากมัธยม

การเรียนคณิตศาสตร์ในมหาวิทยาลัยจะแตกต่างจากที่เรียนมัธยมคือจะประกอบด้วยสองส่วนคือ

1. การศึกษาทฤษฎีบท
2. การแก้ปัญหา

นักศึกษาจำเป็นต้องมีทั้งสองทักษะนี้ ซึ่งทั้งสองทักษะนี้ไม่ได้แยกออกจากกันอย่างสิ้นเชิง ในการแก้ปัญหาใดๆ มักจะมีการอ้างทฤษฎีบท เราจะต้องมีความเข้าใจทฤษฎีบทอย่างถ่องแท้ ก่อนที่จะนำไปใช้ได้ถูกต้อง และเหมาะสม ปัญหาหลายปัญหาค่อนข้างจะเป็นนามธรรมมาก (คือไม่ใช่แค่ยกมาหนึ่งตัวอย่าง แต่เป็นการพูดถึง ในกรณีทั่วไป) จำเป็นต้องแสดงการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ถ้าการเรียนของนักศึกษาเป็นแบบเพิกเฉยทฤษฎีบท ตรงไปอ่านโจทย์ตัวอย่างว่าจะทำอย่างไร เลียนแบบแล้วจำไว้ ก็จะมีปัญหาในการเรียนแน่นอน

## คราวนี้ก็มาถึง เทคนิคการเรียนรู้แคลคูลัสให้สำเร็จ

1. จัดเวลาการทำแบบฝึกหัดและการทบทวนให้เหมาะสม วิธีนี้จะช่วยสร้างความมั่นใจในการเรียนและเป็นการสร้างสมดุลระหว่างเวลาเรียนและเวลาพักผ่อน
2. ใช้เวลาอย่างน้อย 2-4 ชั่วโมงในการทำแบบฝึกหัดของแต่ละหัวข้อ จะช่วยให้นักศึกษา จัดระบบความคิด สร้างคำถาม และสร้างแนวคิดสำหรับการแก้ปัญหาที่ซับซ้อนท้าทายมากขึ้นได้
3. นิยาม สูตร และทฤษฎีบท ที่กล่าวถึงในห้องเรียนหรือต้องใช้ในการทำแบบฝึกหัด ควรจะทำความเข้าใจในทันที การผลัดวันไปเรื่อยๆจนกว่าจะสอบ จะทำลายโอกาสการเข้าใจเนื้อหาที่ลึกซึ้งขึ้น
4. พยายามให้เวลาในการทำแบบฝึกหัดแคลคูลัสทุกวัน วันละเล็กน้อย จะได้คุ้นเคยกับแนวคิด นิยาม และทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์ ซึ่งจะช่วยให้การเรียนง่ายขึ้นทุกวัน
5. หาเพื่อนอย่างน้อย 1-2 คนในห้อง ที่จะทำการบ้านและเตรียมตัวสอบด้วยกัน เวลาที่ดีที่สุดที่ควรจับกลุ่มปรึกษากันคือหลังจากได้ใช้ความรู้ ความสามารถและประสบการณ์ของตนเองอย่างที่สุดแล้วในการแก้ปัญหา เมื่อพบโจทย์ที่แก้ไม่ได้ อย่าท้อแท้โดยทันที นี่เป็นโอกาส ที่จะทำให้จินตนาการและความรู้ทางคณิตศาสตร์งอกงามขึ้น การหาความช่วยเหลือ หรือดูเฉลยวิธีทำโจทย์ก่อนที่จะลองพยายามด้วยตนเอง จะทำให้เราไม่ทราบศักยภาพที่แท้จริงของตัวเอง
6. เตรียมตัวอย่างน้อย 5 วันก่อนสอบ ให้เขียนแจกแจงเรื่องต่างๆที่ต้องสอบ จะได้ว่าต้องเตรียมอะไรบ้าง และมีเวลาให้กับสิ่งที่ไม่ค่อยเข้าใจได้อย่างพอเพียง การทำเช่นนี้จะช่วยลดความเครียดและวิตกกังวลของการสอบ ทั้งยังลดความวุ่นวายเมื่อมีปัญหาเร่งด่วนที่อาจเข้ามาแทรกได้ เช่น เจ็บป่วย ญาติหรือเพื่อนมาเยี่ยม ทะเลาะกับแฟน หรือต้องส่งรายงานของวิชาอื่นที่เรียน การอ่านหนังสืออย่างหนักตลอดวันก่อนการสอบคงไม่ช่วยให้ทำข้อสอบได้ดีขึ้นมาก อย่าลืมนะว่า การท่องจำเป็นเทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่ได้ผลน้อยที่สุด
7. เตรียมตัวสอบโดยลงมือทำปัญหาใหม่ๆ แหล่งที่จะหาได้คือ หนังสือแคลคูลัสทั้งหลายในห้องสมุด หรือข้อสอบเก่า การทำโจทย์เฉพาะเท่าที่มีอยู่ท้ายหัวข้อของเอกสารประกอบการสอน อาจไม่ใช่การเตรียมตัวที่มีประสิทธิภาพ เนื่องจากเราทราบว่าแต่ละหัวข้อเน้นอะไร อาจทำให้เราเข้าใจผิดคิดว่าเข้าใจเนื้อหาดีแล้ว ให้ลองทำโจทย์ที่มีหลายหัวข้อรวมกัน เราจะได้ฝึกการจำแนกปัญหา และนำความรู้ที่มีอยู่มาประมวลผลแก้ปัญหาได้
8. ฝึกหัดทำแบบจำลองของข้อสอบ ภายในเวลาและเงื่อนไขอื่นๆของการสอบ เช่น ห้ามใช้หนังสือ เครื่องคิดเลข ห้ามถามเพื่อน
9. ควรคิดว่า “ข้อสอบน่าจะยากและต้องเป็นโจทย์ที่น่าสนใจและท้าทายความสามารถ” เพื่อจะได้มีการเตรียมตัวที่เหมาะสม ถ้าเกิดข้อสอบง่ายกว่าที่คิด เราก็ยอมที่จะได้คะแนนสูงเพราะมีการเตรียมตัวมาดี
10. การเขียนเฉพาะคำตอบไม่ได้มีค่าอะไรมากนัก เนื่องจากคะแนนของการทำปัญหาคณิตศาสตร์ไม่ได้อยู่ที่คำตอบ แต่อยู่ที่การแสดงว่า เข้าใจวิธีที่จะได้คำตอบหรือไม่
11. ในระหว่างการสอบ ถ้าไม่รู้ว่าจะเริ่มต้นทำอย่างไร อย่าคิดที่จะ **ท้อจิต** โดยเด็ดขาด การท้อจิตเป็นความผิดพลาดทางวินัยและศีลธรรม เสื่อมเสียถึงวงศ์ตระกูล ทำลายอนาคตของตนเอง ส่งผลร้ายแรงถึงขั้นถูกลบชื่อออกจากความเป็นนักศึกษา ไม่ว่าจะในแง่ใด การท้อจิตไม่คุ้มที่จะทำ

การเขียนเรื่อยเปื่อยหรือทำแบบมั่วๆเพื่อคิดจะหลวกลวงอาจารย์ที่ตรวจ หรือคิดว่าเมื่ออาจารย์จะให้คะแนน เพราะเขียนยาวก็ไม่ได้ผลเช่นกัน สิ่งที่เราควรจะทำคืออ่านโจทย์อีกรอบ ตีความเป็นคำพูดของเราว่าโจทย์ ต้องการอะไร อาจวาดรูปประกอบ เราอาจจะเข้าใจมากขึ้น ถ้ายังทำไม่ได้ให้ไปทำข้ออื่นก่อนแล้วค่อยกลับมา คิดใหม่ การตอบปัญหาที่ตรงประเด็นและถูกต้องแม้จะเพียงเล็กน้อยก็อาจได้คะแนนมากกว่า การตอบยาว แต่หาประเด็นไม่ได้

12. ก่อนวันสอบให้ดูประกาศว่า สอบห้องไหน เวลาอะไร นักศึกษาต้องรู้ว่าตนเองเขียนเรียนกระบวนวิชารหัส อะไร ตอนที่เท่าไร และอาจารย์ผู้สอนชื่ออะไร เพื่อจะได้ไม่เกิดผิดพลาดเข้าห้องสอบผิดวิชา อย่าลืมว่าวิชาชื่อ แคลคูลัส เปิดสอนเป็นหลายรหัส

13. เมื่อถึงวันสอบ

- เข้าห้องสอบที่ถูกต้อง และตรงเวลา
- นำบัตรนักศึกษา และอุปกรณ์เครื่องเขียนมาให้ครบ กรรมการคุมสอบอาจไม่ใช่ผู้สอน จึงต้องมีการ ตรวจบัตร
- อ่านคำชี้แจงหน้าแรก และกรอกข้อมูลทุกอย่างให้ครบถ้วนถูกต้อง เช่น ชื่อ รหัส ตอนที่ ลำดับที่ อย่า เก็บไว้เขียนตอนอาจารย์บอกว่าหมดเวลา เพราะเมื่อหมดเวลาหมายถึงต้องส่งข้อสอบ และจะไม่มี โอกาสเขียนชื่ออีก
- โจทย์ที่ยาวไม่ได้หมายถึงโจทย์ที่ยาก ให้มีความอดทนที่จะอ่านและทำความเข้าใจกับโจทย์นั้น
- “คะแนนมาจากวิธีทำ” ให้เขียนอธิบายอย่างรอบคอบและเป็นระเบียบเรียบร้อย
- อย่าดี้นตระหนกและลบทุกอย่างตอนใกล้หมดเวลา ส่วนที่ทำนั้นอาจถูกต้องแล้วก็ได้
- ถ้ามีเวลาเหลืออย่ารีบออกจากห้องสอบ ให้ตรวจทานก่อน
- **อย่าทุจริต**
- ในกรณีฉุกเฉินที่ทำให้จำเป็นต้องขาดสอบ เช่น เจ็บป่วย ให้นักศึกษา ผู้ปกครอง ผู้เกี่ยวข้อง หรือ เพื่อน ติดต่อบอณาจารย์ผู้สอนทันที และปฏิบัติตามระเบียบเมื่อขอสอบภายหลัง

14. เมื่อมีการประกาศคะแนนแล้วให้ขอดูข้อสอบว่าทำอะไรถูกผิดอย่างไร จะได้ปรับปรุงตนเองถ้ามีข้อสงสัยเรื่อง คะแนนให้รับสอบถาม การตรวจข้อสอบจำนวนมากในแต่ละครั้ง อาจารย์อาจเกิดความผิดพลาดได้

15. ใช้แหล่งความรู้ที่มีอย่างคุ้มค่าที่สุด แหล่งความรู้ได้แก่ การบรรยายในชั้นเรียน อาจารย์ผู้สอน หนังสือใน ห้องสมุด การจัดติวโดยชมรมวิชาการ รุ่นพี่ เพื่อนๆ

16. หลีกเลี่ยงความผิดพลาดเล็กน้อย ความผิดพลาดแต่ละอย่างที่เกิดขึ้นอาจเกิดจากความไม่รอบคอบ หรือ อาจเป็นตัวบ่งชี้ปัญหาที่ร้ายแรงกว่านั้นคือ การเข้าใจผิดหรือไม่เข้าใจกฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ นักศึกษา สามารถหลีกเลี่ยงปัญหาเหล่านี้ได้โดย ต้องเข้าใจก่อนว่าทำไมถึงไม่ถูกต้อง และระมัดระวังในทุกขั้นตอน การทำงาน

ความผิดพลาดต่างๆ ที่พบบ่อย เช่น

- ลืมกระจาย  
$$3 - 2(x + 2) = 3 - 2x + 2$$
- กระจายกำลัง  
$$(x + 2)^3 = x^3 + 2^3$$

- ตัดทออม  $\frac{x^2 + 3x - 2}{(x - 2)(x + 3)} = 1, \quad \frac{\sin(xy)}{x} = \sin y$
- เศษส่วน  $\frac{3}{x} + \frac{x + z}{y} = \frac{3 + x + z}{x + y}$
- เลขลบและกำลังที่เป็นเศษส่วน
- ลืมใช้ กฎผลคูณ กฎผลหาร กฎลูกโซ่
- กระจาย ตัดทออม ของฟังก์ชันตรีโกณ ลอการิทึม  $\ln(x^3 - x^2) = \ln x^3 - \ln x^2 = 3 \ln x - 2 \ln x = \ln x$
- ไม่เติมค่าคงที่เมื่ออินทิเกรต ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต
- ใช้สัญลักษณ์ผิด
- ใช้ลิมิตค่าเดิมหลังจากเปลี่ยนตัวแปร  $\int_1^2 \frac{dx}{(3 - 5x)^2}$  ให้  $u = 3 - 5x, \quad du = -5dx$   
 $\int_1^2 \frac{dx}{(3 - 5x)^2} = -\frac{1}{5} \int_1^2 \frac{du}{u^2}$

17. เมื่อสอบกลางภาคแล้วได้คะแนนน้อยจะทำอย่างไรดีละ??? ลองถามตัวเองก่อนว่าที่ผ่านมาได้มีการเตรียมตัวและทบทวนอย่างเหมาะสมหรือไม่ เรามีความรู้ในเรื่องที่ผ่านมาพอเพียงที่จะนำไปใช้ต่อในเนื้อหาถัดไปหรือไม่ ถ้าเราปรับปรุงตนเองจะสามารถเข้าใจเนื้อหาใหม่และเรียนต่อไปได้หรือไม่ ถ้าคิดว่าทำได้ ให้มีความตั้งใจและพยายามเพิ่มขึ้น ถ้าคิดว่าที่ผ่านมาได้ใช้ความพยายามอย่างที่สุดแล้ว แต่ทำไม่ได้ ให้รีบไปพบอาจารย์ที่ปรึกษา อย่าตั้งความหวังกับสิ่งที่ไม่เคยเป็นความจริง เช่น ข้อสอบปลายภาคคงจะง่ายกว่านี้ ถ้าสอบตกค่อยติดสินบนอาจารย์ พาผู้ปกครองหรือผู้มีอำนาจมาข่มขู่อาจารย์เพื่อให้ผ่าน จัดตั้งมีอบ หรือวางแผนการทุจริตเพื่อให้ผ่าน อย่างที่กล่าวไว้ การทุจริตให้ผลร้ายแรง และไม่คุ้มที่จะทำ
18. ข้อสำคัญถึงแม้จะอยู่ท้ายสุดคือ อย่าคร่ำครวญขอรั้งอาจารย์ด้วยเหตุผลต่างๆ เพื่อ **ขอเกรด** เช่น จะต้องถูกให้ออกเพราะเกรดไม่ถึง เรียนตัวต่อไปไม่ได้และต้องเรียนซ้ำกว่าเพื่อนในรุ่น หลุดทุน พ่อแม่จะไม่ส่งต่อ ไม่มีเงินลงทะเบียนเรียนตัวนี้แล้ว อยู่ปีแปด เหลือตัวนี้อีกตัวเดียวเท่านั้น ใด้งานแล้วต้องรีบจบ เกณฑ์สูงไปทำไมปีก่อนนั้นไม่เหมือนแบบนี้ เครียดมากเรื่องเกรดจนป่วย ไม่อยากให้พ่อแม่ผิดหวังที่สอบไม่ผ่าน ... แม้ว่าในบางครั้งวิธีนี้อาจจะใช้ได้ผลกับอาจารย์บางท่าน(ซึ่งมีเป็นจำนวนน้อย) แต่ลองถามตัวเองเถอะว่าการกระทำแบบนี้เป็นสิ่งที่น่าภาคภูมิใจนักหรือ เกรดที่ได้เป็นสิ่งที่ได้มาโดยการมีสมควร ไม่ใช่จากความสามารถของตนเอง เอาเปรียบเพื่อนคนอื่นที่เรียนด้วยกัน